Вестник

Российско-Армянского (Славянского) университета

№1

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ISSN 1829-0450

ЕРЕВАН 2014

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)
УНИВЕРСИТЕТ

В Е С Т Н И К

РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО (СЛАВЯНСКОГО) УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ:
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

№1

Издательство РАУ

Ереван 2014

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ)
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լ Ր Ա Բ Ե Ր

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ)

ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ

ՍԵՐԻԱ
ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ

ԵՎ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

№ 1

ՀՌՀ Հրատարակչություն

Երևան 2014

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ, № 1. – Ер.: Изд-во РАУ, 2014. – 104 с.

Редакционная коллегия:

Главный редактор *Амбарцумян С.А.*
Зам. главного редактора *Аветисян П.С.*
Ответственные секретари *Геолецян Г.Г., Шагинян Р.С.*

Члены редколлегии:

О.В. Бесов, В.И. Буренков, Г.Р. Вардапетян, М.А. Давтян, Г.Г. Данагулян, В.С. Егиазарян, И.Д. Заславский, Г.Г. Казарян, Э.М. Казарян, Г.А. Карапетян, Б.И. Коноплев, Г.Б. Маранджян, Р.Л. Мелконян, В.И. Муронец, Б.С. Нагапетян, С.Г. Петросян, А.А. Саркисян, Г.З. Саркисян, А.Г. Сергеев, В.И. Таирян

Журнал входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА

Российско-Армянский (Славянский) университет, 2014 г.

ISBN 1829-0450
© Издательство РАУ, 2014

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.6 Поступила 01.11.2013г.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧЕБЫШЕВСКИХ ИТЕРАЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МНОГОУРОВНЕВЫХ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ

Ю.Р. Акопян, Р.З. Оганесян

Ереванский государственный университет
e-mail: yuri.hakopian@ysu.am, ruzan.hovhannisyan@ysu.am

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье дается принципиальная схема построения алгебраических многоуровневых переобуславливателей для матриц, ассоциируемых с последовательностями вложенных конечномерных пространств. Такие матрицы возникают во многих задачах вычислительной линейной алгебры, для решения которых используются многоуровневые структуры. В работе предлагается и обосновывается применение внутренних чебышевских итераций для построения переобуславливателей. Выводится оценка числа обусловленности.
Ключевые слова: матрица, собственное значение, переобуславливание, число обусловленности, чебышевский итерационный метод.

Введение

Многие прикладные задачи современного естествознания приводят к решению систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{1}$$

высокого порядка. При этом системы часто оказываются плохо обусловленными (см., напр., [1]), и это является причиной того, что применение стандартных методов линейной алгебры для решения таких систем является нецелесообразным.

Для решения систем высокого порядка наибольшее распространение получили итерационные методы (см., напр., [2, 3]). Как известно, скорость сходимости итерационного метода зависит от числа обусловленности матрицы A системы (1) (ниже мы дадим определение этого понятия). Чем больше число обусловленности, тем больше итераций требуется для достижения заданной

точности и, как следствие, большее число арифметических операций. Для улучшения обусловленности матрицы системы вводится так называемая *переобуславливающая матрица* или, иначе, *переобуславливатель* P, и вместо системы (1) рассматривается эквивалентная система

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b. \qquad (2)$$

При этом переобуславливатель P должен удовлетворять двум основным требованиям, которые можно кратко сформулировать следующим образом:

– матрица P должна хорошо аппроксимировать матрицу A в том смысле, что число обусловленности матрицы $P^{-1}A$ должно быть значительно меньше числа обусловленности самой матрицы A;

– решение линейной системы с матрицей P должно быть легко осуществимо, то есть, не требовать больших вычислительных затрат.

Техника и методы построения переобуславливателей довольно разнообразны [4]. Для численного решения дифференциальных уравнений с частными производными большое распространение получили так называемые *многосеточные* (или *многоуровневые*) методы переобуславливания, реализация которых связана с использованием последовательностей сгущающихся сеток (см., напр., [5-9]).

В настоящей работе дается описание и обоснование общей схемы построения многоуровневых переобуславливателей для симметричных положительно определенных матриц, ассоциируемых с последовательностью вложенных конечномерных пространств.

2. Схема построения многоуровневого переобуславливателя

Пусть имеется некоторая последовательность симметричных положительно определенных матриц

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(p)} \equiv A, \qquad (3)$$

задаваемая некоторым иерархическим процессом их построения, где $p > 1$ есть натуральное число. Будем говорить, что матрица $A^{(k)}$ соответствует k-му уровню процесса построения. Обозначим через n_k порядок матрицы $A^{(k)}$; при этом $n_0 < n_1 < \cdots < n_p$. Для значений $k = 1,2,\ldots, p$ представим матрицы $A^{(k)}$ в блочном виде

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

в котором $A_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1,2$ есть блоки размера $n_k^{(i)} \times n_k^{(j)}$, где

$$n_k^{(1)} = n_{k-1},\ \ n_k^{(2)} = n_k - n_{k-1}.$$

Наша задача заключается в построении многоуровневого переобуславливателя для матрицы A. В качестве промежуточного этапа в процессе построения такого переобуславливателя в предлагаемой нами схеме предполагается предварительное построение так называемых *двухуровневых переобуславливателей* для матриц $A^{(k)}$, $1 \le k \le p$ (отметим, что такой подход применялся ранее, в работах [6, 8]). Осуществить это можно следующим образом. Введем в рассмотрение *дополнение Шура*

$$S^{(k)} \equiv A_{11}^{(k)} - A_{12}^{(k)} A_{22}^{(k)^{-1}} A_{21}^{(k)}$$

матрицы $A^{(k)}$, записанной в блочной форме (4) (относительно дополнения Шура см., напр., [1, 3]). Тогда матрица $A^{(k)}$ может быть записана в следующем виде:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} S^{(k)} + A_{12}^{(k)} A_{22}^{(k)^{-1}} A_{21}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Определим в качестве двухуровневого переобуславливателя для матрицы $A^{(k)}$, $1 \le k \le p$ матрицу

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \omega_k\, A^{(k-1)} + B_{12}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{21}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix},\ \omega_k = const > 0, \qquad (5)$$

в которой $B_{12}^{(k)}$, $B_{21}^{(k)}$ и $B_{22}^{(k)}$ есть некоторым образом подобранные аппроксимации соответствующих блоков $A_{12}^{(k)}$, $A_{21}^{(k)}$ и $A_{22}^{(k)}$; при этом матрица $B^{(k)}$ должна быть также симметричной и положительно определенной. Построение таких аппроксимаций зависит от природы, специфики и свойств исходных матриц (3) (для случая конечноэлементных матриц см., напр., работы [5, 6, 8]). Заметим лишь, что одним из важнейших требований является вычислительная простота обращения блока $B_{22}^{(k)}$ (например, когда этот блок является диагональной либо трехдиагональной матрицей).

Напомним одно общеизвестное понятие. Для любых симметричных положительно определенных матриц A и B *спектральное число обусловленности* $\kappa(B^{-1}A)$ определяется следующим образом:

$$\kappa(B^{-1}A) \equiv \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \qquad (6)$$

где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ есть соответственно наибольшее и наименьшее из собственных чисел матрицы $B^{-1}A$ (см., напр., [1, 3]). В дальнейшем мы будем предполагать, что собственные числа матриц $B^{(k)^{-1}}A^{(k)}$, $1 \le k \le p$ принадлежат некоторому отрезку $[d_1, d_2]$, где $0 < d_1 < d_2$. Тогда, как следует из (6),

$$\kappa(B^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \le d \equiv \frac{d_2}{d_1}. \tag{7}$$

Перейдем непосредственно к построению многоуровневого переобуславливателя. Выберем некоторое целое число $s > 1$ и для значений $k = 1,2,\ldots,p$ последовательно определим матрицы

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} \omega_k R^{(k-1)} + B_{12}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{21}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} R^{(0)} = A^{(0)}, \quad k = 1, \\ R^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left[I^{(k-1)} - \prod_{j=1}^{s} \left(I^{(k-1)} - \theta_j^{(k-1)} M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)} \right) \right]^{-1}, \quad 2 \le k \le p \end{cases} \tag{9}$$

(здесь $I^{(k-1)}$ есть единичная матрица порядка n_{k-1}). В качестве параметров $\theta_j^{(k-1)}$ выбираются числа

$$\theta_j^{(k-1)} = \frac{2}{(\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}) + (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}) t_j^{(s)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

где

$$t_j^{(s)} = \cos \frac{2j-1}{2s} \pi, \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

являются корнями многочлена Чебышева первого рода степени s (см., напр., [1,2]), а $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ есть отрезок, содержащий все собственные числа матрицы $M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}$, то есть,

$$sp(M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}) \subseteq [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$$

(в дальнейшем символом *sp* будем обозначать спектр матрицы).

Получим формулы, по которым вычисляются границы спектра матрицы $M^{(k)^{-1}}A^{(k)}$, $1 \le k \le p$. Так как, по определению, $M^{(1)} = B^{(1)}$ (см. (5), (8) и (9)), то согласно сделанному выше предположению относительно собственных чисел матриц $B^{(k)^{-1}}A^{(k)}$, можем утверждать, что

$$sp(M^{(1)^{-1}}A^{(1)}) \subseteq [\alpha_1, \beta_1], \tag{10}$$

где

$$\alpha_1 = d_1, \quad \beta_1 = d_2 .$$

Далее, пусть для некоторого значения $k \ge 2$ известно, что

$$sp(M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}) \subseteq [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}],$$

где $0 < \alpha_{k-1} < \beta_{k-1}$. Справедливо равенство

$$M^{(k)^{-1}}A^{(k)} = (M^{(k)^{-1}}B^{(k)})(B^{(k)^{-1}}A^{(k)}) . \tag{11}$$

Согласно сказанному выше,

$$sp(B^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \subseteq [d_1, d_2]. \tag{12}$$

Как следует из (5), (8), (9) и теории чебышевского итерационного метода [2],

$$sp(M^{(k)^{-1}}B^{(k)}) \subseteq \left[1-\gamma_{k-1}^{(s)}, 1+\gamma_{k-1}^{(s)}\right], \tag{13}$$

где

$$\gamma_{k-1}^{(s)} = \frac{2q_{k-1}^{s}}{1+q_{k-1}^{2s}} \;, \; q_{k-1} = \frac{\sqrt{c_{k-1}}-1}{\sqrt{c_{k-1}}+1} \;, \; c_{k-1} = \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} . \tag{14}$$

В результате из (11) – (13) получим, что

$$sp(M^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \subseteq [\alpha_k, \beta_k] ,$$

где

$$\alpha_k = d_1(1-\gamma_{k-1}^{(s)}), \quad \beta_k = d_2(1+\gamma_{k-1}^{(s)}) . \tag{15}$$

Таким образом, нами построена последовательность матриц

$$M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(p)} \equiv M .$$

Матрицу M назовем *многоуровневым переобуславливателем* для матрицы A. Поясним, почему переобуславливатель называется многоуровневым. Дело

в том, что в итерационных методах с матрицей $M = M^{(p)}$ в качестве переобуславливателя нам необходимо, как увидим ниже, решать системы линейных алгебраических уравнений с матрицами $M^{(k)}$, где $k = 1,2,..., p$ (см., напр., [2-4]). Действительно, рассмотрим некоторую систему

$$M^{(k)} x = b. \tag{16}$$

Беря за основу блочное представление (8) матрицы $M^{(k)}$, осуществим соответствующее разбиение векторов x и b на подвекторы, а именно, запишем их в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда решение системы (16) сводится к следующей вычислительной процедуре.

ПРОЦЕДУРА MG PREC/ $M^{(k)}$

1. вычисляется вектор

$$z_1 = \frac{1}{\omega_k}(b_1 - B_{12}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} b_2); \tag{17}$$

2. вычисляется x_1: решается система

$$R^{(k-1)} x_1 = z_1; \tag{18}$$

при $2 \le k \le p$: решение системы (18) эквивалентно выполнению s шагов чебышевского итерационного метода

$$M^{(k-1)} \frac{x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)}}{\theta_j^{(k-1)}} = -A^{(k-1)} x_1^{(j-1)} + z_1 \;, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{19}$$
$$x_1^{(0)} = 0; \;\; x_1 = x_1^{(s)};$$

при $k = 1$: решается система

$$A^{(0)} x_1 = z_1; \tag{20}$$

3. вычисляется x_2:

$$x_2 = B_{22}^{(k)^{-1}} (b_2 - B_{21}^{(k)} x_1). \tag{21}$$

КОНЕЦ ПРОЦЕДУРЫ

Дадим некоторые пояснения к процедуре. Как видим, решение системы с матрицей $M^{(k)}$ сводится к последовательному решению систем с матрицей $M^{(k-1)}$ (при $k \ge 2$ см. (19)), либо к решению системы с матрицей $A^{(0)}$ (при $k=1$). Согласно выдвинутому выше требованию, матрица $B_{22}^{(k)}$ является легко обратимой. Поэтому вычисления по формулам (17) и (21) не требуют больших вычислительных затрат. На самом нижнем уровне $(k=0)$ система уравнений (20) решается с помощью некоторого прямого метода.

3. Оценка числа обусловленности

Получим оценку спектрального числа обусловленности матрицы $M^{-1}A$ и, в связи с этим, обсудим вопрос выбора числа внутренних чебышевских итераций s. Введем в рассмотрение числа

$$c_k \equiv \frac{\beta_k}{\alpha_k}, \quad k = 1,2,\dots,p. \tag{22}$$

Фактически, эти величины, согласно определению (6), являются верхними оценками чисел обусловленности матриц $M^{(k)^{-1}}A^{(k)}$, то есть,

$$\kappa(M^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \le c_k, \quad k = 1,2,\dots,p. \tag{23}$$

Как следует из (7), (10), (15) и (22),

$$c_1 = d, \quad c_k = d\,\frac{1+\gamma_{k-1}^{(s)}}{1-\gamma_{k-1}^{(s)}}, \; k = 2,3,\dots p.$$

Пользуясь формулами (14), получим:

$$\frac{1+\gamma_{k-1}^{(s)}}{1-\gamma_{k-1}^{(s)}} = \frac{1+\dfrac{2q_{k-1}^s}{1+q_{k-1}^{2s}}}{1-\dfrac{2q_{k-1}^s}{1+q_{k-1}^{2s}}} = \frac{1+2q_{k-1}^s+q_{k-1}^{2s}}{1-2q_{k-1}^s+q_{k-1}^{2s}} = \left(\frac{1+q_{k-1}^s}{1-q_{k-1}^s}\right)^2 = \left[\frac{(\sqrt{c_{k-1}}+1)^s+(\sqrt{c_{k-1}}-1)^s}{(\sqrt{c_{k-1}}+1)^s-(\sqrt{c_{k-1}}-1)^s}\right]^2.$$

Таким образом, определенные в (22) величины c_k могут быть вычислены с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$\begin{cases} c_1 = d, \\ c_k = d\left[\dfrac{(\sqrt{c_{k-1}}+1)^s+(\sqrt{c_{k-1}}-1)^s}{(\sqrt{c_{k-1}}+1)^s-(\sqrt{c_{k-1}}-1)^s}\right]^2, \quad k = 2,3,\dots,p. \end{cases} \tag{24}$$

Для установления характера поведения величин c_k рассмотрим нелинейное уравнение

$$c = \varphi(c), \qquad (25)$$

где

$$\varphi(c) \equiv d\left[\frac{(\sqrt{c}+1)^s + (\sqrt{c}-1)^s}{(\sqrt{c}+1)^s - (\sqrt{c}-1)^s}\right]^2 .$$

Лемма. Если $s > \sqrt{d}$, то уравнение (25) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Рассматривая положительные значения c, сделаем замену переменной $z = 1/\sqrt{c}$. Тогда от уравнения (25) мы перейдем к уравнению

$$z = \psi(z), \qquad (26)$$

где

$$\psi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{(1+z)^s - (1-z)^s}{(1+z)^s + (1-z)^s} .$$

Как видно из выражения для этой функции, $\psi(0) = 0$ и $\psi(1) = 1/\sqrt{d}$.

Прежде всего заметим, что для значений $z \geq 1$ очевидно

$$\frac{(1+z)^s - (1-z)^s}{(1+z)^s + (1-z)^s} \leq z$$

и, тем самым, $\psi(z) < z$ (напомним, что $d > 1$). Поэтому положительные решения уравнения (26) следует искать в интервале $(0,1)$.

Вычислим производную функции $\psi(z)$. Получим

$$\psi'(z) = \frac{4s}{\sqrt{d}} \frac{(1+z)^{s-1}(1-z)^{s-1}}{[(1+z)^s + (1-z)^s]^2} .$$

Очевидно, что $\psi'(z) > 0$ для значений $0 < z < 1$, причем $\psi'(0) = s/\sqrt{d}$ и $\psi'(1) = 0$. Далее, вычислим вторую производную:

$$\psi''(z) = -\frac{8s}{\sqrt{d}} \frac{(1-z^2)^{s-2}\{(s-1)z[(1+z)^s + (1-z)^s] + s(1-z^2)[(1+z)^{s-1} - (1-z)^{s-1}]\}}{[(1+z)^s + (1-z)^s]^3}.$$

Как видим, $\psi''(z) < 0$, если $0 < z < 1$.

Последующие рассуждения таковы. Рассмотрим функцию

$$f(z) \equiv z - \psi(z), \qquad z \in [0,1].$$

Очевидно, что $f(0)=0$ и $f(1)=1-1/\sqrt{d}>0$. Для производной $f'(z)=1-\psi'(z)$ этой функции имеем:

$$f'(0)=1-\frac{s}{\sqrt{d}}<0 \text{ и } f'(1)=1.$$

Так как $f''(z)=-\psi''(z)>0$, то функция $f'(z)$ в интервале $(0,1)$ монотонно возрастает. Следовательно, по теореме Больцано-Коши существует единственная точка $\bar{z}\in(0,1)$ такая, что $f'(\bar{z})=0$. При этом $f'(z)<0$ для $z<\bar{z}$ и $f'(z)>0$, если $z>\bar{z}$. Тем самым в интервале $(0,\bar{z})$ функция $f(z)$ монотонно убывает, а в интервале $(\bar{z},1)$ монотонно возрастает. Кроме того, исходя из равенства

$$f(\bar{z})=f(0)+f'(\xi)\,\bar{z}\,,\ \xi\in(0,\bar{z})\,,$$

получим, что $f(\bar{z})=f'(\xi)\,\bar{z}<0$. Следовательно, существует единственная точка $z_*\in(\bar{z},1)$ такая, что $f(z_*)=0$, то есть, $z_*=\psi(z_*)$. Таким образом, если $s>\sqrt{d}$, то уравнение (26) имеет единственное положительное решение z_*, заключенное в интервале $(0,1)$. Тем самым уравнение (25) имеет единственное положительное решение $c_*=1/z_*^2$. Лемма доказана.

Возвратимся к рекуррентной процедуре (24). Пусть

$$z_k=\frac{1}{\sqrt{c_k}}, \quad k=1,2,\ldots,p.$$

Согласно проведенной выше при доказательстве леммы замене переменной, эти величины вычисляются посредством рекуррентной процедуры

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{d}}, \quad z_k=\psi(z_{k-1}), \quad k=2,3,\ldots,p. \tag{27}$$

Ниже, в качестве иллюстрации, приведен график функции $\psi(z)$ при условии, что $s>\sqrt{d}$. Нетрудно убедиться в том, что $z_1>z_*$. Тем самым последовательность (27) является монотонно убывающей и ограниченной снизу (при неограниченном росте числа уровней p) величиной z_*.

Переходя к величинам c_k, получим, что

$$c_1<c_2<\cdots<c_p<c_*.$$

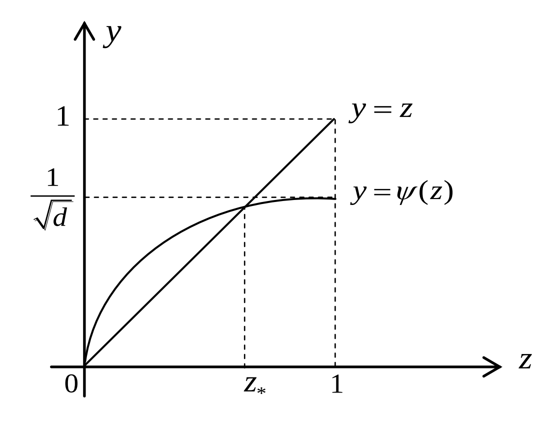


Рис. График функции $\psi(z)$.

Таким образом, последовательность чисел c_k, вычисляемых по рекуррентным формулам (24), является монотонно возрастающей и ограниченной сверху (при неограниченном росте числа уровней p) величиной $c_* = 1/z_*^2 > 1$.

Подводя итог, приходим к следующему утверждению.

Теорема. Если $s > \sqrt{d}$, то

$$\kappa(M^{-1}A) \le c_*,$$

где величина c_* есть единственный положительный корень уравнения (25).

Заключение

Предложенная в работе принципиальная схема построения алгебраических многосеточных переобуславливателей может быть использована при решении плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Такие системы возникают, в частности, при конечноразностной или конечноэлементной аппроксимации дифференциальных уравнений на последовательности сгущающихся сеток, в задачах наименьших квадратов с использованием вложенных пространств базисных функций (см., напр., [10]) и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Axelsson O.* Iterative Solution Methods. Cambridge University Press, 1994.
4. *Ke Chen.* Matrix Preconditioning Techniques and Applications. Cambridge University Press, 2005.
5. *Axelsson O. and Vassilevski P.S.* Algebraic multilevel preconditioning methods.I. Numer. Math., 56. PP. 157–177 (1989).
6. *Kuznetsov Yu. A.* Algebraic multigrid domain decomposition methods. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 4, № 5. PP. 351–379 (1989).
7. *Bramble J.H., Pasciak J.E. and J. Xu.* Parallel multilevel preconditioners. Math. Comput. V. 55, № 191. PP. 1–22 (1990).
8. *Hakopian Yu.R. and Yu.A. Kuznetsov.* Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 6, № 6. PP. 453–483 (1991).
9. *Axelsson O., Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A.* Multilevel preconditioning for perturbed finite element matrices. IMA J. Numer. Anal., 17. PP. 125–149 (1997).
10. *Оганесян Р.З.* О поведении числа обусловленности матриц нормальных систем на последовательности сеток. Математика в высшей школе. Ер.: Изд-во «Чартарагет». Т. 8, № 2. СС. 42–51 (2012).

ON THE USE OF CHEBYSHEV ITERATIONS IN CONSTRUCTION OF MULTILEVEL PRECONDITIONERS

Yu.R. Hakopian, R.Z. Hovhannisyan

SUMMARY

In the paper a concept of constructing algebraic multilevel preconditioners for the matrices associated with sequences of nested finite dimensional spaces is given. Such matrices arise in many problems of computational linear algebra the solution of which involves the use of multilevel structures. For construction of the preconditioners inner Chebyshev iterations are proposed. An estimate of the condition number is derived.

Keywords: matrix, eigenvalue, preconditioning, condition number, Chebyshev iterative method.

ՉԵԲԻՇԵՎՅԱՆ ԻՏԵՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԲԱԶՄԱՄԱԿԱՐԴԱԿԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Յու.Ռ. Հակոբյան, Ռ.Զ. Հովհաննիսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում տրվում է հանրահաշվական բազմամակարդակային վերապայմանավորիչների կառուցման սխեմա՝ ներդրված վերջավոր չափանի տարածությունների հետ զուգորդված մատրիցների համար: Այդպիսի մատրիցներ առաջանում են հաշվողական գծային հանրահաշվի բազմաթիվ խնդիրներում, որոնց լուծման համար կիրառվում են բազմամակարդակային կառուցվածքներ: Աշխատանքում առաջարկվում և հիմնավորվում է ներքին չեբիշևյան իտերացիաների կիրառմամբ վերապայմանավորիչների կառուցման մի եղանակ: Ստացված է պայմանավորվածության թվի գնահատականը:

Հիմնաբառեր՝ մատրից, սեփական արժեք, վերապայմանավորում, պայմանավորվածության թիվ, չեբիշևյան իտերացիոն մեթոդ:

УДК 517.53 Поступила 11.10.2013г.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ВДОЛЬ ОРИЦИКЛИЧЕСКИХ ПУТЕЙ

С.Л. Берберян

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются некоторые предельные множества вдоль орициклических путей действительнозначных функций, определенных в единичном круге. Подобные предельные множества вдоль углов Штольца рассматривались ранее для мероморфных и гармонических функций.

Ключевые слова: нормальные функции, предельные множества, орициклические пути.

Рассмотрим граничное поведение гармонических функций вдоль орициклических путей. В работе будем придерживаться общепринятых обозначений. Кроме того, введем дополнительные обозначения. Через $R(f,\xi,S)$ обозначают множество повторяющихся значений функции $f(z)$ на множестве S, $a=f(z_n^a), n\in N,$ для которой последовательность $\left\{z_n^a\right\}$ точек множества S, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^a=\xi,$ удовлетворяет условию $\xi\in\Gamma$. Орицикл $\Lambda(\xi)$ называют орициклическим направлением Жюлиа для функции $f(z)$, если для любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$, содержащего орицикл $\Lambda(\xi)$ множество $R(f,\xi,\mathrm{O}\Delta(\xi))$ покрывает все множество R, за возможным исключением не более двух значений.Точка $\xi\in\Gamma$ называется орициклической точкой Жюлиа для функции $f(z)$, если каждый орицикл $\Lambda(\xi)$ является орициклическим направлением Жюлиа функции $f(z)$. Множество всех орициклических точек Жюлиа обозначим через $J(f)$. Орицикл $\Lambda(\xi)$ назовем уточненным орициклическим направлением Жюлиа для функции $f(z)$, если для орицикла $\Lambda(\xi)$ множество $R(f,\xi,\Lambda(\xi))$ покрывает все множество R, за возможным исключением не более двух значений. Точку $\xi\in\Gamma$ назовем уточненной орициклической точкой Жюлиа функции $f(z)$ и отнесем к подмножеству $J^*(f)$ множества $J(f)$, если для любого орицикла $\Lambda(\xi)$, множество $R(f,\xi,\Lambda(\xi))$ покрывает R, за возможным исключением двух значений. Орицикл $\Lambda(\xi)$ назовем обобщенным

орициклическим направлением Жюлиа для функции $f(z)$, если для любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$, содержащего орицикл $\Lambda(\xi)$, множество $R(f,\xi,\mathrm{O}\Delta(\xi))$ накрывает интервал $(a,+\infty)$, где $a\in[-\infty,+\infty)$, за возможным исключением не более двух значений. Точку $\xi\in\Gamma$ назовем обобщенной орициклической точкой Жюлиа для функции $f(z)$, если каждый орицикл $\Lambda(\xi)$ является обобщенным орициклическим направлением Жюлиа функции $f(z)$ при одном и том же значении a. Через $J_*(f)$ обозначим множество всех обобщенных орициклических точек Жюлиа на Γ. Отметим, что при $a=-\infty$ обобщенные орикциклические точки Жюлиа совпадают с обычными орициклическими точками Жюлиа. Скажем, что точка $\xi\in\Gamma$ является орициклической точкой Плеснера для действительнозначной функции $f(z)$, если для любого угла $O\Delta(\xi)$ $C(f,\xi,O\Delta(\xi))=\overline{R}$. Множество орициклических точек Плеснера обозначим через I(f). Скажем, что точка $\xi\in\Gamma$ является обобщенной орициклической точкой Плеснера для действительнозначной функции $f(z)$, если для любых орициклических углов $O\Delta_1(\xi)$ и $O\Delta_2(\xi)$ предельные множества $C(f,\xi,O\Delta_1(\xi))$. $C(f,\xi,O\Delta_2(\xi))$ совпадают, и для любого угла $O\Delta(\xi)$ $C(f,\xi,O\Delta(\xi))=[a,+\infty]$, где $a\in[-\infty,+\infty)$. Множество обобщенных орициклических точек Плеснера обозначим через $I_*(f)$. Для дальнейшего приведем одно известное утверждение.

Теорема A. Если у непрерывной в D действительнозначной функции $f(z)$ множество $C(f,\xi,S)$ для связного множества S в D не вырождается в единственную точку, то $R(f,\xi,S)\supset\operatorname{int}C(f,\xi,S)$, где символ $\operatorname{int}A$ обозначает множество всех внутренних точек множества A.

Из теоремы А вытекает, в частности, что если у непрерывной функции $f(z)$, определенной в D, некоторое предельное множество $C(f,\xi,O\Delta(\xi))=\overline{R}$ для связного множества $O\Delta(\xi)$, то $R(f,\xi,O\Delta(\xi))=R$. Последнее замечание позволяет изучить множество $J(f)$ точек Жюлиа непрерывной действительнозначной функции $f(z)$.

Следствие. Для произвольной непрерывной действительнозначной функции $f(z)$ справедливо свойство $I(f)=J(f)$, причем в каждой точке $\xi\in J(f)$ выполняется соотношение $R(f,\xi,O\Delta(\xi))=R$ для всех орициклических углов $O\Delta(\xi)$.

Рассмотрим следующее более общее утверждение.

Теорема 1. Для произвольной действительнозначной непрерывной функции $f(z)$ справедливо равенство $I_*(f)=J_*(f)$, причем в каждой точке

$\xi \in J_*(f)$ множество $R(f,\xi,O\Delta(\xi))$ накрывает интервал $(a,+\infty)$ для любых орициклических углов $O\Delta(\xi)$, где $a \in [-\infty,+\infty)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\xi \in I_*(f)$. В силу утверждения теоремы А, так как предельное множество $C(f,\xi,O\Delta(\xi))$ непрерывной функции $f(z)$ для любого угла $O\Delta(\xi)$ не вырождается в точку, то

$$R(f,\xi,O\Delta(\xi)), \supset \operatorname{int} C(f,\xi,O\Delta(\xi)) \quad (1),$$

где символ $\operatorname{int} C(f,\xi,O\Delta(\xi))$ обозначает множество всех внутренних точек множества $C(f,\xi,O\Delta(\xi))$ и $C(f,\xi,O\Delta(\xi)) = [a,+\infty]$. Отсюда следует, что множество $R(f,\xi,O\Delta(\xi))$ накрывает интервал $(a,+\infty)$ для любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$, где $a \in [-\infty,+\infty)$ и, значит, $\xi \in J_*(f)$. Следовательно, $I_*(f) \subseteq J_*(f)$. Пусть $\xi \in J_*(f)$. Тогда для любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$ множество $R(f,\xi,O\Delta(\xi))$ накрывает интервал $(a,+\infty)$ при некотором значении $a \in [-\infty,+\infty)$, за возможным исключением, двух значений. Хорошо известно (см., например, [1]), что если множество S связное в D, то предельное множество $C(f,\xi,S)$ для любой непрерывной функции $f(z)$ является связным замкнутым множеством на $\overline{R}$. Поэтому отсюда и из соотношения (1) следует, что для любого угла $O\Delta(\xi)$ $C(f,\xi,O\Delta(\xi)) = [a,+\infty]$, где $a \in [-\infty,+\infty)$. Следовательно, $\xi \in I_*(f)$ и утверждение теоремы 1 доказано.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ – произвольная непрерывная функция класса $\Re$ и орицикл $\Lambda(\xi)$ является уточненным направлением Жюлиа. Тогда $C(f,\xi,\Lambda(\xi)) = \overline{R}$.

Доказательство теоремы 2. Действительно, из определения уточненного направления Жюлиа следует, что множество $R(f,\xi,\Lambda(\xi))$ совпадает с R, за возможным исключением не более двух значений. В силу замкнутости и связности множества $C(f,\xi,\Lambda(\xi))$, а также из утверждения теоремы А следует, что

$$C(f,\xi,\Lambda(\xi)) = \overline{R}, \quad (2)$$

и утверждение теоремы 2 доказано.

Рассмотрим еще одну теорему о граничном поведении непрерывных действительнозначных функций.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ – произвольная непрерывная действительнозначная функция в D и ξ – любая точка на Γ. Для того, чтобы функция $f(z)$ имела в точке ξ орициклический предел, необходимо и достаточно существование

в любом интервале (a, b), где $a<b$ и $a, b \in \overline{R}$, по крайней мере, одной точки c, не принадлежащей $\boldsymbol{R(f, \xi, \mathrm{O}\Delta(\xi))}$ для любого угла $O\Delta(\xi)$.

Доказательство теоремы 3. Необходимость непосредственно следует из того, что предельное множество $R(f, \xi, O\Delta(\xi))$ содержится в предельном множестве $C(f, \xi, O\Delta(\xi))$, и предельное множество $R(f, \xi, O\Delta(\xi)) \supset \operatorname{int} C(f, \xi, O\Delta(\varsigma\})$ состоит из одной точки. Для доказательства достаточности допустим противное, т.е. существует некоторый орициклический угол $O\Delta(\xi)$, для которого предельное множество $C(f, \xi, O\Delta(\xi))$ не состоит из одной точки. Тогда, в силу непрерывности функции $f(z)$ и связности угла $C(f, \xi, O\Delta(\xi))$, множество $C(f, \xi, O\Delta(\xi)) = [a,b]$, где $a, b \in \overline{R}$. Согласно утверждению теоремы А $R(f, \xi, O\Delta(\xi)) \supset \operatorname{int} C(f, \xi, O\Delta(\varsigma\}$, и, значит, $R(f, \xi, O\Delta(\xi)) \supset (a, b)$, что противоречит предположению. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берберян С.Л., Гаврилов В.И.* Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям // Mathematica Montisnigri, 1993. Vol. 1. PP. 17–25.
2. *Коллингвуд Э. и Ловатер А.* Теория предельных множеств. М.: Изд-во «Мир», 1971. С. 306.
3. *Берберян С.Л.* Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций // Изв. вузов, математика, 1986, № 3. СС. 22–28.
4. *Bagemihl F.* Horocyclic boundary properties of meromorphic functions // Annal. Acad. Scien. Fennicae, 1966, Ser. AI, № 385. PP. 1–18.

S.L. Berberyan

SUMMARY

This paper discusses some limit sets of paths along the horocyclical paths of real functions defined on the unit disk. These cluster sets previously considered for meromorphic and harmonic functions along the Stolz corners.

Ս.Լ. Բերբերյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են միավոր շրջանում որոշված իրական ֆունկցիաների որոշ սահմանային բազմությունները օրիցիկլիկ ուղղություններով: Նախկինում նման սահմանային բազմությունները Շտոլցի անկյուններով դիտարկվել են մերոմորֆ և հարմոնիկ ֆունկցիաների համար:

УДК 519.72 Поступила 12.09.2013г.

CANONICAL MODEL: FORMAL SEMANTICS

Manuk Manukyan

Yerevan State University, Yerevan 0025, Armenia
mgm@ysu.am

ABSTRACT

In the frame of an approach to information integration an extensible canonical model, which is based on the algebraic model of an advanced XML data model, is created. A principle of kernel extension of canonical model is proposed. In order to create the justifiable data model mapping for heterogeneous databases integration, concept of data model has been formalized by means of the AMN (Abstract Machine Notation) formalism. Namely, we offer formalization principles of basic and complex concepts of data model. These concepts have been formalized by means of AMN type system and AMN machine correspondingly. For each source model we create a reversible mapping into an extension of the canonical model. The B-technology is used to prove that the AMN semantics of the source model represents a refinement of the AMN semantics of the extended canonical model. Hereby, the correctness of mapping and the ability to use extended canonical model for representation the source model schemas are proved. AMN-machines for the canonical and relational data models and relational refinement of the canonical model have been created.

1. Introduction

The aim of the information integration is to use two or more databases (data sources) in the frame of a large database, possibly virtual, containing information from all sources, so the data can be queried as a unit. Thus, a data integration system should provide the user with a unified view, called global schema, of a set of heterogeneous data sources. Problems of information integration detail were discussed in literature, for example in [7, 23]. There are two approaches for heterogeneous data sources integration: Global-as-view (GAV) and Local-as-view (LAV). According to GAV [6, 16] a global schema is defined as a view over the data sources, while LAV [6, 16] assumes that data sources are defined as a view over the global schema. GAV approach has better query processing capabilities than LAV but LAV has better extensibility than GAV. To combine advantages of the mentioned techniques a mixed approach, called GLAV, is considered in [4]. There is a certain technique for compiling a GLAV system into an equivalent GAV one [3].

The theoretical basis of our approach to information integration are the works of the SYNTHESIS group (IPI RAS) [9–11], which are pioneers in the area of justifiable data model mapping for heterogeneous databases integration. In [11] the basic definitions of equivalence of database states, database schemas and data models were introduced to preserve operations and information while constructing of mappings of various heterogeneous structured data models into the canonical one. According to this approach, each data model was defined by syntax and semantics of two languages, i.e. data definition language (DDL) and data manipulation language (DML). The main principle of mapping of an arbitrary resource data model into the target one (the canonical model) could be reached under the condition, that the diagram of DDL (schemas) mapping and the diagram of DML (operators) mapping are commutative. In early works, to prove a commutativity of the diagrams the denotational semantics were used as a formalism (metamodel) [11]. Later, as formalism the AMN [1] was used instead of the denotational semantics. Instead of equivalence of respective specifications, it became possible to reason on their refinement [12]. It is said that the machine M_R is *refines* machine M_A only if M_R is a replacement for M_A in all possible situations M_A is defined. This does not however indicate that M_R is to be equivalent to M_A. *B*-technology for AMN provides tools for conducting model mappings commutativity with proofs semi-automatically. It is assumed that the canonical model should be extensible. A kernel of the canonical model is fixed. For each specific information model *M* of the environment an extension of the kernel is defined axiomatically so that this extension together with the kernel is refined by *M*. Such refining transformation of models should be provably correct. The canonical model for the environment is synthesized as the union of extensions, constructed for models *M* of the environment. The resource schema refines the canonical model schema. The refinement of the schema mapping is formally checked. In the frame of the considered formalism is offered construct:

- M_S (source model) into an extension M_t (target model) mapping;
- AMN semantics of M_S ;
- AMN semantics of the extended M_t .

The *B*-technology is applied to proof that M_S is a refinement of the extension of M_t. The approach is supported by semi-automatic tools [14] and used for model unification and GLAV-based subject mediation of heterogeneous distributed information resources [2, 13]. In the frame of the proposed formalism a subject mediation approach is considered, for instance, in [2, 13]. For information integration a canonical model is introduced. The kernel of this model is a hybrid object-oriented/frame-based information model. Method and tools for semantic mapping of the kernel into the AMN are provided [22]. For any source model a mapping into an extension of the canonical model is defined. The source schema refines the canonical model schema. The refinement of the schema mapping is formally checked.

In [21, 20] as in papers [2, 13, 15] we follow the approach provided by SYNTHESIS group and introduce an extensible canonical model for information integration, having the algebraic model of an advanced XML data model (XML application)

[17] as kernel. Our choice of using XML data model as a model for information integration is explained by the possibility of modeling principal concepts of conventional data models and semistructured data by means of XML element directly. In case of object-oriented model there are three principal concepts: the class (or its extent), the relationship and the method. Likewise, the object-relational model has two similar concepts: the attribute type (which includes classes) and relation. On XML data model level we can blend these concepts, much as relational model blends entity sets and relationships. However, the motivation for the blending appears to be different in each case. While the relational model owes some of its success to the fact it facilitates the efficient implementation, interest in the XML data model is motivated primarily by its flexibility. The reasoning considered above fully coincides with the analogous reasoning for semistructured data model proposed in [5] as an information integration model.

According to our approach to information integration, for any source model a reversible mapping into an extension of the canonical model is defined. The basic formalism for the construction of a mediator is the AMN. Data models and mappings from one model to another are represented in AMN by means of corresponding specifications. First of all the kernel of the canonical model is fixed, representing the AMN semantics for the target model. AMN semantics and extension of canonical model by specific concepts of the source model (which impossible to model on the level of target model) are constructed for arbitrary data model of independent information source, in order to integrate it into a virtual database. The B-technology is used to prove that the AMN semantics of the source model represents a refinement of the AMN semantics of extended canonical model. Hereby the correctness of mapping and the ability to use extended canonical model for representation of schemas of the source model are proved. In our case is offered construct:

• AMN semantics of XDM (once);

• AMN semantics of M_S.

It is important that we essentially reduce the number of mappings. The distinguishing feature of our approach is that we perform verification of mapping on the level of data models (but not on the level of schemas). Such approach is explained by the fact that if the source model is a refinement of target model then for each correct schema of the source model there exists an equivalent correct schema in the target model. Thus, our approach to information integration is developing further the approach presented in [12]. The kernel extension principle and structural aspects of mapping from source model into canonical model in detail are considered in [21, 20]. The latter was reported at the international First Workshop on Programming the Semantic Web (Proceedings will be published by Springer). It was recognized as one of the best works of the workshop, was recorded and placed at the page of the workshop on videolectures.net as a video lecture. In this paper we shall consider the behavioral and structural issues of mapping from source model into canonical model. The behavioral issues is suppose that operations of M_S should refine the operations M_t. For this purpose by means of AMN we offer to formalize DML of these models on the level of algebra. In the context of structural mapping, to create the justifiable data

model mapping for heterogeneous databases integration, concept of data model has been formalized by means of the AMN formalism. Namely, we offer formalization principles of basic and complex concepts of data model. These concepts have been formalized by means of AMN type system and AMN machine correspondingly. AMN-machines for the canonical and relational data models and relational refinement of the canonical model have been created. Thus, in the frame of this paper is proposed the further development the approach to information integration presented in works [21, 20]. Finally, our approach to information integration AMN formalism has a double application. First of all this formalism we use to proof correctness of mapping from source model into canonical model. Second, based on the AMN-machines of source and canonical models and refinement-machine of canonical model we should generate canonical schemas.

The paper is organized as follows: An overview of the AMN and extensible data model is considered in Section 2. The principle of kernel extension is introduced in Section 3. Formalization principles of data models in AMN are proposed in Section 4. The conclusion is provided in Section 5.

2. Preliminaries

2.1 XDM: An XML Data Model

XDM is a result of an extension of the XML data model semantics to support the DB concept. Namely, the considered XML data model is an extension of the conventional XML data model by means of the applicative syntax and semantics which substantially increases the expressiveness of the XML data model. In this model basic and compound objects are considered. Examples of basic objects are integers, strings, variables of different sorts, symbols (for instance, reserved words). The compound objects are defined in terms of *binding* and *application* in λ-calculus [8]. The type system is built from a basis of types that are defined by themselves and certain recursive rules, whereby the compound types are built from simpler types. The basis consists of the conventional atomic types (for example, *integer*, *string*, *boolean*, etc.). We use the following type constructors for building compound types:

- *Attribution.* If *v* is a basic object variable and *t* is a typed object, then **attribution** (*v*, *type t*) is a typed object. It denotes a variable with type *t*.
- *Abstraction.* If *v* is a basic object variable and *t*, *A* are typed objects, then **binding** *(lambda,* **attribution** (*v*, *type t*), *A*) is a typed object.
- *Application.* If *F* and *A* are typed objects, then **application** (*F*, *A*) is a typed object.
- *Function Space*. If *t* and *u* are typed objects, and *v* is a basic object variable, then **binding** (*PiType,* **attribution** (*v*, *type t*), *u*) is typed object. It represents the type of functions mapping an argument *v* of type *t* to a result of type *u*.

Adding applicative syntax and semantics substantially increases the expressiveness of the XML data model. For this data model a declarative query language (ele-

ment calculus)[1] is developed [17]. We can combine the possibility of the applicative programming with element calculus to give very complex *integrity constraints* on the global schema level. The necessity to give such integrity constraints is arised as the data at the sources may not satisfy the constraints of the global schema. The considered approach of constructing AMN semantics for the algebraic model of XDM is based on the following definitions [18, 19]:

Definition 1 *We say that S is a schema, if* $S = \langle name, type^{2}, f \rangle$ *or* $S = \langle name, typeOp(S_1, S_2, ..., S_n), f \rangle$, *and* S_i *is a schema*[3], *where* $typeOp \in \{sequence, choice, all\}$[4], $f \in \{?, *, +, \perp\}$[5], $1 \le i \le n$.

Definition 2 *The element s of schema S is a finite collection of mappings*
$S \rightarrow domain(firstComp(S)) \times domain(secondComp(S))$;
if $secondComp(S) = typeOp(S_1, S_2, ..., S_n)$ *then the following constraint should be hold for all* $e \in s$: $e[S_i] \in domain(S_i)$, $1 \le i \le n$.

The *f irstComp, secondComp, domain* functions have an obvious semantics in the previous definition. Notice that

$domain(secondComp(S))$ = (if $secondComp(S) = atomictype$ then $valSet(atomictype)$ else $\cup^{n}_{i=1} domain(S_i)$)

Definition 3 *Let R and Q be elements schemas. We say that R and Q are similar*[6], *if* $secondComp(R) = atomictype1$, $secondComp(Q) = atomictype2$, *and* $atomictype1 = atomictype2$, *or* $secondComp(R) = typeOp(R_1, R_2, ..., R_n)$, $secondComp(Q) = typeOp(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$, *and* R_i, Q_i *are similar,* $1 \le i \le n$.

Definition 4 *Let R and Q be elements schemas. We say that R is subschema of Q* ($R \subseteq Q$), *if* $firstComp(R) = name1$, $secondComp(R) = atomictype1$, $firstComp(Q) = name2$, $secondComp(Q) = atomictype2$, *and* $name1 = name2$, $atomictype1 = atomictype2$, *or* $firstComp(R) = name1$, $secondComp(R) = typeOp(R_1, R_2, ..., R_k)$, $firstComp(Q) = name2$, $secondComp(Q) = typeOp(Q_1, Q_2, ..., Q_m)$, *and* $name1 = name2$, *and* $\forall i \in$

[1] The detailed discussion of the query language of the mediator is beyond the topic of this paper.
[2] Atomic type or function type.
[3] The attributes are not considered for simplicity.
[4] sequence, choice, all have similar semantics as in XML Schema.
[5] ?, $*$, $+$ have similar semantics as in XML, a $\perp$ following an object means that the object may occur exactly one time.
[6] This is an analog concept for the union compatibility of the relational algebra.

$[1, k]$ $\exists j \in [1, m]$ *that* $R_i \subseteq Q_j$.

Definition 5 *Let r and q be elements with R and Q similar schemas correspondingly*[7]. *Let us say that r and q are equal, if secondComp(R) = secondComp(Q) = atomictype, and content(r) = content(q), or secondComp(R) = typeOp*(R_1 , R_2, ..., R_n), *secondComp(Q) = typeOp*(Q_1, Q_2, ..., Q_n):

a) typeOp = sequence, $\forall i \in [1, n]$ *firstC omp*(R_i) = *firstC omp*(Q_i), *and* r_i *and* q_i *are equal elments with similar schemas* R_i *and* Q_i *correspondingly*;

b) *typeOp = all,* $\forall i \in [1, n]$ $\exists j \in [1, n]$ *firstComp*(R_i) = *firstComp*(Q_j), *and* r_i *and* q_j *are equal elements with similar schemas Ri and Qj correspondingly;*

c) *typeOp = choice, there is a unique* $i \in [1, n]$ *such that the following holds for some unique* $j \in [1, n]$: *firstComp*(R_i) = *firstComp*(Q_j), *and* r_i *and* q_j *are equal elments with similar schemas* R_i *and* Q_j *correspondingly.*

Element Algebra. The semantics of operations of the relational algebra is redefined to directly apply the standard algebraic operations to *xdm-elements*. Let us define concatenation of $r =< namer, r_1, r_2, ... , r_k >$ and $q = < nameq, q_1, q_2,... , q_m >$ elements as follows:

$$r \,||\, q = < r \,||\, q, r_1, r_2, ... , r_k, q_1, q_2,... , q_m >$$

Below is considered a brief description of basic operations of element algebra. *Set-theoretic operations*. In definition of set-theoretic operations union, intersection and difference it is assumed that schemas of operands are similar. Let r and q be elements with R and Q similar schemas correspondingly[8]. The union, intersection and difference of r and q elements are the elements defined as follows:

$$r \cup q =< r \cup q, \langle t | t \in r \vee t \in q \rangle >$$

$$r \cap q =< r \cap q, \langle t | t \in r \wedge t \in q \rangle >$$

$$r - q =< r - q, \langle t | t \in r \wedge t \notin q \rangle >$$

Cartesian Product. Let *r* and *q* be the elements with *R* and *Q* schemas correspondingly. The Cartesian product of *r* and *q* elements is an element defined as follows:

$$r \times q =< r \times q, \langle t \,||\, s \,| t \in r \wedge s \in q \rangle >$$

---

[7] Without loss of generality it is assumed that an element schema is a pair of the following type <name, type>.

[8] We will use ⟨ ⟩ to signify a multiset, { } to denote a set, while [ ] symbolizes a list.

Selection. Let r be an element with schema R, and P be a predicate. The result of operation of selection from r by P is an element defined as follows:

$$\sigma_P(r) = < \sigma_P(r), \langle t | t \in r \wedge P(t) \rangle >$$

Projection. Let r be an element with schema R and $\pi_L(r)$ be a projection operation, where L is a list of elements. For simplicity let us assume $L = [A, E \rightarrow Z, X \rightarrow Y]$ (A, $X \in R$), then the result of the projection operation is an element defined as follows:

$$\pi_L(r) = < \pi_L(r), \langle < name, (t[A] \parallel Z) \parallel t[Y] > | t \in r \wedge Y = X \wedge Z := E \rangle >$$

Duplicate Elimination. Let r be an element with R schema. The result of a duplicate elimination operation is an element defined as follows:

$$\delta(r) = < \delta(r), \{t | t \in r\} >$$

Natural Joins. Let r and q be elements with R and Q schemas correspondingly, such that $R \nsubseteq Q$ and $Q \nsubseteq R$ and $R \cap Q \neq \varnothing$. The natural join of r and q elements is an element defined as follows:

$r \bowtie q = < r \bowtie q, t \parallel s[\bar{L}] | t \in r \wedge s \in q \wedge t[L] = s[L] \rangle >$, where $L = R \cap Q$, $\bar{L} = Q - L$

Theta Joins. Let r and q be elements with R and Q schemas correspondingly and P be a predicate. The theta join of r and q elements is an element defined as follows:

$$r \bowtie_P q = < \mathrm{r} \bowtie_P \mathrm{q}, \langle \mathrm{t} \parallel \mathrm{s} | \mathrm{t} \in \mathrm{r} \wedge \mathrm{s} \in \mathrm{q} \wedge \mathrm{P}(t \parallel s) \rangle >$$

Division. Let r and q be elements with R and Q schemas correspondingly, $Q \subseteq R$, and $L = R - Q$. The result of r divide by q operation is an element defined as follows:

$$r \div q = < r \div q, \{t[L] | t \in r \wedge (\forall s \in q)(t[L] \parallel s \in r)\} >$$

Grouping. Let r be an element with schema R and $\gamma_L(r)$ be a grouping operation, where L is a list of elements. For simplicity let us assume $L = [A, f(B) \rightarrow C]$ ($A, B \in R$, $f \in \{min, max, sum, count, average\}$), then the result of the grouping operation is an

element defined as follows:

$$\gamma_L(r) =< \gamma_L(r), \{t[A] \,\|\, s \mid t \in r \wedge s =< C, f(\pi_B(\sigma_{A=t[A]}(r))) >\} >$$

Notice that our algebra includes the conventional aggregation functions as well. More detail description of operations of element algebra can be found in [18, 19]. Finally, our algebra is closed with respect to the element [18, 19].

2.2 AMN: A formal language of specification

AMN is a state-oriented formalism for software development which consists of the following notations: the logical notation, the basic set notation, the relational notation, the mathematical object notation, and the generalized substitution notation. In the frame of AMN specifications, refinements and implementations are presented as abstract machines. AMN allows to define a context of global constraints, given constants, abstract sets (their properties), a list of state variables and operations on them, the latter having optional preconditions, parameters and results. Operations of abstract machines are based on *generalized substitutions* describing the conversions between states of the system. Each generalized substitution S is defined as a predicate transformer which transforms a postcondition R into the weakest precondition that guarantees the preservation of R after the operation execution. The information defining the state of a machine is contained in local *variables*, and general constraint about the state of a machine can be expressed by a proposition called *invariant*. The key concept of AMN is refinement which is formalized by means of so-called *proof obligations*. Finally, large software development is supported by using several composition mechanisms, i.e. SEES, USES, INCLUDES, EXTENDS. They give different access privileges to the operations or to the local variables of an external machine. The syntax for the abstract machine is as follows:

MACHINE *MachineDeclaration*
USES *MachineList*
SEES *MachineList*
INCLUDES *InstantiatedMachineList*
EXTENDS *InstantiatedMachineList*
SETS *SetList*
CONSTANTS *ConstantList*
PROPERTIES *Predicate*
VARIABLES *VariableList*
INVARIANTS *Predicate*
INITIALISATION *Substitution*
OPERATIONS *OperationList*
END

Refinement is defined as follows:

REFINEMENT r
REFINES m
SEES sm
INCLUDES im
SETS s
CONSTANTS c
PROPERTIES $P(s, c)$
VARIABLES x
INVARIANTS $I(x)$
INITIALISATION S
OPERATIONS $O_1; O_2; ...; O_n$
END

Let us consider how the formalized machine M refines machine N in AMN:

REFINEMENT
REFINES N
CONSTANTS c_M
PROPERTIES P_M
VARIABLES v
INVARIANTS I_M
INITIALISATION $Init_M$
OPERATIONS
$y \leftarrow op(x) =$
PRE $Pre_{op,M}$
THEN $Def_{op,M}$
END
...
END

M REFINEMENT N
REFINES K
CONSTANTS c_N
PROPERTIES P_N
VARIABLES w
INVARIANTS I_N
INITIALISATION $Init_N$
OPERATIONS
$y \leftarrow op(x) =$
PRE $Pre_{op,N}$
THEN $Def_{op,N}$
END
...
END

We say that M refines N if it holds the following proof obligations:

- There is a unified state of M and N satisfying the invariants M and N.

$$P_M \wedge P_N \Rightarrow \exists (v, w) \bullet (I_M \wedge I_N)$$

- Initialization M refines the initialization N.

$$P_M \wedge P_N \Rightarrow [Init_M]\neg([Init_N]\neg I_M)$$

• Operations M refines the operations N.

$$P_M \wedge P_N \wedge I_M \wedge I_N \wedge Pre_{op,N} \Rightarrow$$
$$Pre_{op,M} \wedge [Def_{op,N}\{y \rightarrow y\}]\neg([Def_{op,M}]\neg(I_M \wedge y'' = y))$$

3. Kernel extension principle

The canonical model must be extensible. The extension of the canonical model is formed by consideration of each new data model by adding new symbols (constructions) to its DDL to define logical data dependencies of the source model in terms of the target model if necessary. In XDM *symbols* are used for data models concepts representation. The extension result must be equivalent to the source data model. To apply a concept on the canonical model level the following rule is proposed:

Concept ← *Symbol* ContextDefinition

For example, to support the concepts of *referential integrity* and *keys* of relational data model, we have expanded the kernel with the following symbols: key, *unique, foreign key, constraint, on update, on delete, cascade,* and *set null.* In general, the kernel extension is reduced to introduce new symbols in so-called *content dictionaries* (XML document) of XDM and to define the context in which these symbols are applied. It is essential that we use a computationally complete language to define the context. Content dictionaries are used to assign informal and formal semantics to all concepts used in the data models. As a result of this approach usage of new symbols in the DDL does not lead to change DDL parser's.

4. AMN formalization of data models

In the frame of our approach to information integration data models and mappings between them are considered as instances of the metamodel. In other words, AMN formalism is used to define concepts of data models. For each data model some abstract machine (or abstract machines hierarchy), which represents AMN semantics for that model[9], is created. Abstract machine Mch_M for a data model M should be constructed so that the set of schemas in model M is in a bijection with the set of acceptable states of machine Mch_M, constrained by its invariant I_M. Mapping a source model into a target one is reduced to modeling the

[9] Without loss of generality, in order to visual simplicity, we will use pseudo-AMN for defining AMN semantics for data models.

target model concepts by means of the source model concepts. For this purpose we construct an AMN machine which extends AMN machine for source model and refines AMN machine the target model.

4.1 Formalization Principles

We suggest the following principles for AMN formalization data models:

- Basic concepts of data models are formalized by using AMN type system;
- Complex concepts of data models are formalized by using AMN machines.

To define AMN semantics of data models we should first formalize basic concepts of these models. Let us consider formalization of basic concepts of relational and XDM data models by means of AMN types system. Below we present formalization of basic concepts of relational data model, namely relation schema and relation. A relation schema is characterized by a finite set of attributes and constraints which is defined on this schema. Examples of constraints are: key, foreign key, constraints on attributes, etc. In this context we offer the following formalization of relation schema concept by means of AMN type system:

$RelationSchemaType = struct($

$\quad attrset : \mathbb{P}(String \times AtomicType),$

$\quad key : \mathbb{P}(String),$

$\quad foreignkey : struct($

$\quad\quad attrset : \mathbb{P}(String),$

$\quad\quad referencing : struct($

$\quad\quad\quad name : String,$

$\quad\quad\quad attrset : \mathbb{P}(String))),$

$\quad constraint : Boolean$

$);$

Here and further, a set of atomic types (for instance, $integer$, $string$, etc.) is designated by means of $AtomicType$. Let R be a relation schema. A relation on relation schema R is a finite set of tuples. A relation is characterized by a name, with schema and a mapping. The following formalization of relation concept by means of AMN type system is offered:

$RelationType = struct($

$\quad name : string,$

$\quad schema : RelationSchemaType,$

$\quad relation : \mathbb{P}(\times_{s \in RelationSchemaType\ atterset}\ ran(s))$

$);$

Now we define basic concepts of XDM data model namely, schema and element. A schema is characterized by a quintuple: name (name of element), image (name of source model databases), typingop (constructor of element), content (element content definition) and frequency (element frequency). The considered formalization of schema concept by means of AMN type system a recursive definition of this concept is assumed:

$$
\begin{aligned}
&SchemaType = struct(\\
&\quad name : string, \\
&\quad image : string, \\
&\quad typingop : \{sequence, choice, all, none\}, \\
&\quad content : AtomicType \times Frequency \mid \\
&\qquad seq(String \times SchemaType \times Frequency) \\
&\quad frequency : Frequency \\
&);
\end{aligned}
$$

Here and further:

$$Frequency = \{?, *, +, \perp\}$$

An element is characterized by with schema and a mapping according to definitions 1 and 2 (see Section 2). The considered formalization of element concept by means of AMN type system is as follows:

$$
\begin{aligned}
&ElementType = struct(\\
&\quad schema : SchemaType, \\
&\quad element : \mathbb{P}(SchemaType) \\
&);
\end{aligned}
$$

Second principle is supposed to define concepts of database schema, databases and operations by means of AMN machines.

4.2 AMN Machine for Relational Data Model

State of this machine is defined by means of two variables: *rdbs* (schema of relational database) and *rdb* (relational database). The values of these variables can be relational database schemas and relational databases, respectively. The invariant section defines the general property of the machine. In this case it states that *rdbs* is a subset of the relational database schema, and *rdb* is a subset of the relational database such that for each $s \in rdbs$ there is a $r \in rdb$ such that *r* is a relation on *s* and satisfies constraints. We consider the following kinds of constraints: key constraints, foreign key constraints and constraints on tuples. In the operation section we offer formalization of operations of relational algebra. By means of these operations we can change state of our machine. As relational database is an instance of this machine, therefore by means of these operations we can change state of

relational database. In the initialisation section the *rdbs* and *rdb* variables are initialized with schema of relational database and relational database correspondingly. AMN machine for relational data model is defined as follows:

MACHINE
RelationalDataModel
VARIABLES
rdbs, rdb
INVARIANT

$rdbs \in P(RelationSchemaType) \wedge rdb \in P(RelationType) \wedge (\forall s \in rdbs$

$\wedge \exists r \in rdb \wedge r.schema.attrset = s \wedge \forall a \in r.schema.attrset \wedge dom(a) \in$

$ran(a) \wedge r.schema.key \subseteq dom(r.schema.attrset) \wedge constraint \in$

$P(dom(r.schema.attrset)) \rightarrow Boolean \wedge (\forall r_1 \in rdb \wedge \exists r_2 \in rdb \wedge$

$r_1.schema.foreignkey.attrset = \emptyset \wedge$

$r_1.schema.foreignkey.referencing.name = r_2.name \wedge$

$r_2.schema.key.attrset = r_1.schema.foreignkey.attrset)$

INITIALISATION
$rdbs, rdb := \{...\}, \{...\}$
OPERATIONS
$res \leftarrow RelationalUnion(r_1, r_2) =$
PRE
$r_1 \in rdb \wedge r_2 \in rdb \wedge uncompability(r_1.schema, r_2.schema)$
THEN
$res := rec(schema : r_1.schema,\ relation : r_1.relation \cup r_2.relation)$
END
...
END

In the operation section the definition *union* operation of relational algebra is considered. Predicate *unioncompabilty* holds if r_1 and r_2 are union-compatible. The rest operations of relational algebra are defined similarly.

4.3 AMN Machine for XDM

As in case with AMN machine for relational data model, state of this machine is defined by means of two variables: *xdbs* (schema of XDM database) and *xdb* (XDM database). The values of these variables can be an XDM database

schemas and an XDM databases, respectively. The invariant section is defined similarly as in case relational data model. In this case it states that *xdbs* is a subset of the XDM database schema, and *xdb* is a subset of the XDM database such that for each $s \in xdbs$ there is an $e \in xdb$ such that *e* is an element on *s*. In the operation section we offer formalization of operations of element algebra. By means of these operations we can change state of XDM database. The initialisation section is interpreted similarity as in the case of AMN machine for relational data model. By means of AMN machine we offer the following formalization for XDM:

MACHINE
XDM
VARIABLES
xdbs, xdb
INVARIANT
$xdbs \in P(SchemaType) \wedge$
$xdb \in P(ElementType) \wedge (\forall s \in xdbs \wedge \exists e \in xdb \wedge$
$identically(e.schema, s.schema)$
INITIALISATION
$xdbs, xdb := \{...\}, \{...\}$
OPERATIONS
$res \leftarrow XDMUnion(e_1, e_2) =$
PRE
$e_1 \in xdb \wedge e_2 \in xdb \wedge similar(e_1.schema, e_2.schema)$
THEN
$res := rec(schema : e_1.schema \oplus e_2.schema,$
$element : e_1.element \cup e_2.element)$
END
…
END

The considered predicate *identically* in the invariant section is held if schemas of elements *e* and *s* are identically equal. The semantics of the predicate *similar* used in the operation *XDMUnion* is based on the definition 3 (see Section 2).

4.4 AMN Representation of the Canonical Model

Let the abstract machine Mch_T for the canonical model, and machine Mch_S for the source model be constructed. We extend the canonical model via machine Ext_{ST}, containing concepts of the source model that are new to the target model. These concepts are expressed as sets and constants of machine Ext_{ST}. Below we present AMN-schemes of source and target models:

MACHINE Mch_T	MACHINE Mch_S
SETS $Sets_T$	SETS $Sets_S$
CONSTANTS $Const_T$	CONSTANTS $Const_S$
PROPERTIES P_T	PROPERTIES P_S
VARIABLES Var_T	VARIABLES Var_S
INITIALISATION $Init_T$	INITIALISATION $Init_s$
INVARIANT I_T	INVARIANT I_S
OPERATIONS Op_T	OPERATIONS Op_S
END	END

The following AMN-scheme is considered for extension of the canonical model:

MACHINE Ext_{ST}
EXTENDS Mch_T
SETS $Sets_{ST}$
CONSTANTS $Const_{ST}$
PROPERTIES P_{ST}
END

4.5 Refinement of the Canonical Model

Let corresponding abstract machines Mch_S and Mch_T be constructed for the source model M_S and the canonical model M_T already. In the frame of our approach to information integration to prove correctness of mapping from source model into canonical model we construct an AMN machine which extends AMN machine for source model and refines the canonical model. In the invariant section of this machine we define conditions of correspondence of schemas of source and canonical models. In the operation section of the considered machine by means of operations of source model algebra we are modeling operations of element algebra. Below we present AMN-scheme for this machine:

REFINEMENT $Ext_{ST}Ref$
REFINES Ext_{ST}
EXTENDS Mch_S
INVARIANT I_R
OPERATIONS Op_R
END

Now, if the conditions of proof obligations are satisfied for this refinement, we can conclude that the AMN semantics of the source model represents a refinement of the AMN semantics of the target model. Thus, the correctness of mapping is proved.

4.6 Relational Refinement of the Canonical Model

In this section, without loss of generality it is assumed that in the frame of the canonical model for building compound types we use type constructor *sequence* and consider the relational refinement of kernel of canonical model. Besides of variables of *RelationalDataModelMachine* we use yet three variables for defining state of this machine. In the invariant section we are defining semantics of these variables and conditions of correspondence of relational and canonical schemas. AMN machine for relational refinement of canonical model is defined as follows:

REFINEMENT *XDMRef*
REFINES *XDM*
EXTENDS *RelationalDataModel*
VARIABLES
$rref1, rref2, resref$
INVARIANT
$rref1 \in rdb \wedge rref2 \in rdb \wedge resref \in rdb \wedge \forall s \in xdbs \wedge s.image =$
$\Box rdbs \Box \wedge \exists r \in rdb \wedge s.name = r.name \wedge (s.typing = none \wedge$
$card(r.schema.attrset) = 1 \wedge dom(s.content) = dom(r.schema.attrset)$
$\wedge ran(s.content) = \bot \vee s.typing = sequence \wedge card(r.schema.attrset)$
$= size(s.content) \wedge s.schema.frequency = \bot \wedge \forall i \in [1, size(s.content)]$
$\wedge \exists a \in r.schema.attrset \wedge dom(a) = dom(dom(s.content(i))) \wedge ran(a)$
$= ran(dom(s.content))) \wedge s.frequency = \bot$
OPERATIONS
$res \leftarrow XDMUnion(e_1, e_2) =$
PRE
$e_1 \in xdb \wedge e_2 \in xdb \wedge$
$issimilar(e_1.schema, e_2.schema)$
THEN
$rref1 := e_1 \; || \; rref2 := e_2$
$resref := RelationalUnion(rref1, rref2)$
$res := resref$
END
…
END

In the operation section we model the semantics of operation *union* of element algebra by means of analogous operation of relational algebra and assignment operations. It is assumed to define the transformation rules of element to relation and vice versa by means of AMN-program. Analogously we can model the rest operations of element algebra.

5. Conclusion

In the frame of an approach to information integration an extensible canonical model is created. The kernel of this model is the algebraic model of an advanced XML data model. The considered XML data model is a result of extension of the conventional XML data model by means of the applicative syntax and semantics which substantially increases the expressiveness of the XML data model. In order to create the justifiable data model mapping for heterogeneous databases integration, concept of data model has been formalized by means of the AMN formalism. We are using AMN formalism as a metamodel. Data models and mappings between them are considered as instances of the metamodel. AMN formalism allowed to define the model-theoretic specifications in the first order logics and to prove the fact of specification refinement. The canonical model by means of a hierarchy of abstract machines is represented. In the top level abstract machine AMN semantics for XDM has been defined. By means of rest abstract machines in this hierarchy we define AMN semantics for extensions of the canonical model. A principle of kernel extension of canonical model is proposed. According to this principle the canonical model is defined as kernel + {new concepts}. Mapping a source model into target model is reduced to modeling the target model concepts by means of the source model concepts. For this purpose we are construct an AMN machine which extends AMN machine for source model and refines AMN machine the target model. We offer formalization principles of basic and complex concepts of data model. These concepts have been formalized by means of AMN type system and AMN machine correspondingly. For each source model we create a reversible mapping into an extension of the canonical model. The B-technology is used to prove that the AMN semantics of the source model represents a refinement of the AMN semantics of the extended canonical model. Hereby, the correctness of mapping and the ability to use extended canonical model for representation the source model schemas are proved. AMN-machines for the canonical and relational data models and relational refinement of the canonical model have been created.

REFERENCES

1. *Abrial J.-R.* The B-Book-Assigning programs to meanings. Cambridge University Press, Great Britain, 1996.

2. *Briukhov D., Kalinichenko L., and Martynov D.* Source registration and query rewriting applying lav/glav techniques in a typed subject mediator. In *9th Russian Conference on Digital Libraries.* Pereslavl, Russia, October 2007. PP. 253–262.

3. *Cali A.* Reasoning in data integration systems: why lav and gav are siblings. In *ISMIS 2003.* Maebashi City, Japan, October 2003. PP. 562–571.

4. *Friedman M., Levy A.Y., and Millstein T.D.* Navigational plans for data integration. In *Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence and Eleventh Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence.* Florida, USA, July 1999. PP. 63–73.

5. *Garcia-Molina H., Ullman J., and Widom J.* Database Systems: The Complete Book. Prentice Hall, USA, 2009.

6. *Halevy A.Y.* Answering queries using views: A survey. *VLDB Journal*, 10(4): 270–294, December 2001.

7. *Halevy A.Y., Rajaraman A., and Ordille J.J.* Data integration: The teenage years. In *32nd International Conference on VLDB*. Seoul, Korea, September 2006. PP. 9–16.

8. *Hindley J.R.* and Seldin J.P. Introduction to Combinators and $\lambda -$ Calculus. Cambridge University Press, Great Britain, 1986.

9. *Kalinichenko L.A.* Data model transformation method based on axiomatic data model extension. In *4th International Conference on VLDB*. Germany, Springer, September 1978. PP. 549–555.

10. *Kalinichenko L.A. Methods and Tools for Integration of Heterogeneous Databases (in Russian)*. Science, USSR, 1983.

11. *Kalinichenko L.A.* Methods and tools for equivalent data model mapping construction. In *Advances in Database Technology-EDBT'90*. Italy, Springer, March 1990. PP. 92–119.

12. *Kalinichenko L.A.* Method for data models integration in the common paradigm. In *First East European Conference, ADBIS 1997*. St.-Petersburg, Russia, September 1997. PP. 275–284.

13. *Kalinichenko L.A., Briukhov D.O., Martynov D., Skvortsov, N.A. and Stupnikov S.A.* Mediation framework for enterprise information system infrastructures: Application-driven approach. In *Ninth International Conference on Enterprise Information Systems, ICEIS'2007*. Funchal, Portugal, June 2007. PP. 246–251.

14. *Kalinichenko L.A. and Stupnikov S.A.* Constructing of mappings of heterogeneous information models into the canonical models of integrated information systems. In *Advances in Databases and Information Systems: Proc. of the 12th East-European Conference*. Pori, Finland, September 2008. PP. 106–122.

15. Kalinichenko L.A. and Stupnikov S.A. Owl as yet another data model to be integrated. In *15th East European Conference, ADFBIS 2011*. Vienna, Austria, September 2008. PP. 178–189.

16. *Lenzerini M.* Data integration: A theoretical perspective. In *Twenty-first ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*. Madison, Wisconsin, USA, June 2002. PP. 233–246.

17. *Manukyan M.G.* Extensible data model. In *12th East European Conference, ADBIS 2008*. Pori, Finland, September 2008. PP. 42–57.

18. *Manukyan M.G.* Element algebra. In *Advances in Databases and Information Systems, Associated Workshops and Doctoral Consortium of the 13th East European Conference, ADBIS 2009*. Riga, Latvia, Springer, September 2009. PP. 113–120.

19. *Manukyan M.G.* Element algebra (extended version). *International Journal of Information Technology and Database Systems*, 1(1):43–56, January-June 2010.

20. *Manukyan M.G.* and *Gevorgyan G.R.* An approach to information integration based on the amn formalism. In *First Workshop on Programming the Semantic Web, in conjunction with the 11th International Semantic Web Conference (will be publish)*. Boston, USA, November 2012.

21. *Manukyan M.G.* and *Gevorgyan G.R.* An xml mediator based on the amn formalism. *Russian-Armenian (Slavonic) University Bulletin*, (1):3–18, June 2012.

22. *Stupnikov S.A., Kalinichenko L.A., and Bressan S.* Interactive discovery and composition of complex web services. In *Advances in Databases and Information Systems: Proc. of the 10th East-European Conference*. Thessaloniki, Greece, September 2006. PP. 216–231.

23. *Ullman J.D.* Information integration using logical views. In *Database Theory – ICDT'97, 6th International Conference*. Delphi, Greece, Springer, January 1997. PP. 19–40.

КАНОНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: ФОРМАЛЬНАЯ СЕМАНТИКА

М. Манукян

АННОТАЦИЯ

В рамках подхода к интеграции информации построена расширяемая каноническая модель данных. Предложены принципы расширения ядра канонической модели и AMN-формализации моделей данных. Построены AMN-машины для канонической и реляционной модели данных, а также реляционное уточнение канонической модели данных. С использованием B-технологии доказывается, что AMN семантика исходной модели данных является уточнением AMN семантики расширенного ядра, чем обосновывается корректность отображения и возможность использования расширенного ядра для представления схем баз данных.

ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ. ՖՈՐՄԱԼ ՍԵՄԱՆՏԻԿԱ

Մ. Մանուկյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ինֆորմացիայի ինտեգրման մի մոտեցման շրջանակում կառուցվել է տվյալների ընդլայնվող կանոնական մոդել: Առաջարկվել են կանոնական մոդելի կորիզի ընդլայնման և տվյալների մոդելների AMN-ֆորմալիզացիայի սկզբունքները: Կառուցվել են AMN-մեքենաներ կանոնական և ռելացիոն մոդելների, ինչպես նաև կանոնական մոդելի ռելացիոն ճշգրտման համար: Օգտագործելով B-տեխնոլոգիա ապացուցվել է, որ տվյալների աղբյուր մոդելի AMN սեմանտիկան ընդլայնված կորիզի սեմանտիկայի ճշգրտումն է, ինչով հիմնավորվում է արտապատկերման կոռեկտությունը և ընդլայնված կորիզի օգտագործման հնարավորությունը տվյալների բազաների սխեմաներ ներկայացնելու համար:

УДК 007.52:519.873 Поступила 21.11.2013г.

МЕТОД ИНТЕРВАЛЬНОГО ЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СХЕМ

А.С. Мартиросян

Российско-Армянский (Славянский) университет
e-mail: ashot23@gmail.com

Аннотация

Рассматривается модель для расчета и оценки возможных ошибок работы больших интегральных схем на логическом уровне проектирования с учетом временных параметров логических элементов. Так как в реальных схемах одинаковые логические элементы могут иметь разные временные параметры, для каждого берется не конкретное значение, а интервал, в котором оно может варьировать. Модель обеспечивает высокую скорость расчетов и тем самым пригодна для расчета тестовых наборов и нахождения ошибок во время проектирования схем.

Ключевые слова: логическое моделирование, цифровые схемы, интервальное моделирование.

Введение

При моделировании современных интегральных схем (ИС) появляется необходимость учета задержек в элементах.

Модель, предложенная в работах [1, 2] не учитывает, что параметры эквивалентных элементов могут варьировать в каком-то интервале. Также не учитывается, что во время работы внутренние и внешние факторы могут принести к разбросу временных параметров схемы.

В работах [3–6] описывается метод интервального моделирования, который в состоянии учитывать вариацию временных параметров схемы, однако игнорируются переключения входного сигнала, которые не приводят к полному срабатыванию на выходе из элемента. Такое приближение неточное при быстрых переключениях схемы.

Предложенная в данной работе модифицированная интервальная модель проектирования дает возможность учета разброса временных параметров схемы и учитывает неполные срабатывания.

О модели

Предлагается заменить логическую модель (ЛМ) на эквивалентную схему, состоящую из моделей логических элементов (МЛЭ). МЛЭ состоит из двух частей: блока логики и инерционности [1]. Структура МЛЭ показана на рис. 1.

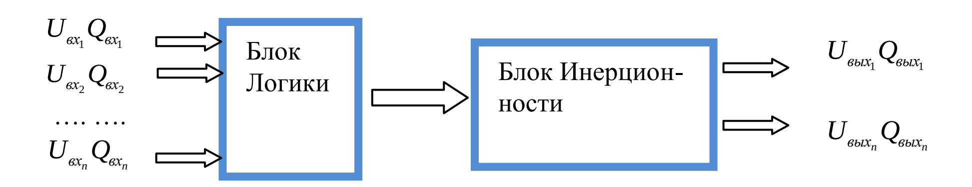


Рис. 1. МЛЭ представляется в виде комбинации блока логики и блока инерционности.

Блок логики реализует логику элемента без учета задержек. Блок инерционности моделирует задержку элемента. Заметим, что в роли логического элемента при таком представлении может играть как стандартный логический вентиль (И, ИЛИ, И-НЕ и т.д.), так и комплексный элемент.

Цифровой фрагмент, который имеет больше одного выхода, или имеет разные инерционные свойства по отношению к разным входным сигналам, можно заменить комбинацией из выше приведенных МЛЭ. Например, фрагмент схемы с двумя выходами можно заменить двумя МЛЭ с одним выходом, как показано на рис 2.

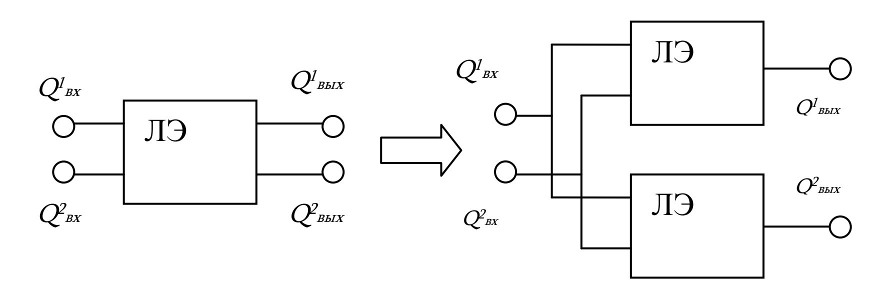


Рис. 2. ЛЭ с двумя выходами заменяется двумя одинаковыми ЛЭ с одним выходом.

На рис. 1 из блока инерционности выходят 2 сигнала $Q^н_{вых}$ и $Q_{вых}$. $Q_{вых}$ – сигнал, принимающий два значения (0 и 1), который дается на вход следующего элемента. $Q^н_{вых}$ – сигнал, подаваемый на аналоговый вход принимает значения из интервала [0,1].

На основе сигнала $Q^{н}_{вых}$ напряжение на выходе $U_{вых}$ определяется следующим образом:

$$U_{вых} = U^{\min}_{вых} + (U^{\max}_{вых} - U^{\min}_{вых})Q^{н}_{вых}, \quad (1)$$

где $U^{\min}_{вых}$ и $U^{\max}_{вых}$ соответственно минимальное и максимальное возможное значение напряжения на выходе.

Блок логики МЛЭ

Блок логики ведет себя как ЛЭ, который он моделирует, но с нулевой задержкой. В рамках модели на вход блока логики подаются только значения 0 и 1 (обычно значение $Q_{вых}$ предыдущего элемента). В нем происходит расчет значения булевой функции ЛЭ, который моментально подается на вход блоку инерционности.

Блок инерционности МЛЭ

В блоке инерционности на основе булевого значения, полученного в блоке логики и внутренних параметров ЛЭ полученных опытным путем, моделируется задержка сигнала.

Блок инерционности характеризуется следующими временными параметрами: $\Delta t_{н}$ и $\Delta t_{у}$.

$\Delta t_{н}$ – отрезок времени между началом изменения сигнала на входе и началом изменения на выходе. В рамках приближения будем также считать, что минимальная продолжительность входного сигнала, при котором наблюдается изменение на выходе, также равняется $\Delta t_{н}$.

$\Delta t_{у}$ – время между началом изменения сигнала на входе и устанавливанием на выходе. В рамках приближения будем также считать, что минимальная продолжительность входного сигнала, при котором происходит полное срабатывание, на выходе также равняется $\Delta t_{у}$.

Значения $\Delta t_{н}$ и $\Delta t_{у}$ при переходе с 0 в 1 и с 1 в 0 в общем случае могут не совпадать. В связи с этим введем соответствующие обозначения: $\Delta t^{01}_{н}, \Delta t^{10}_{н}$, $\Delta t^{01}_{у}$ $\Delta t^{10}_{у}$.

Временные параметры одинаковых ЛЭ на практике могут варьировать. Чтобы учитывать данный факт будем рассматривать не конкретные значения параметров, а интервалы, в которых они могут варьировать. Минимальное зна-

чение параметра обозначим штрихом, а максимальное двумя штрихами. Например $(\Delta t_{н}'^{01}, \Delta t_{н}''^{01})$.

В модели предполагается, что:

$$\Delta t_{н}'^{01} \le \Delta t_{н}''^{01} \le \Delta t_{у}'^{01} \le \Delta t_{у}''^{01} \text{ и } \Delta t_{н}'^{10} \le \Delta t_{н}''^{10} \le \Delta t_{у}'^{10} \le \Delta t_{у}''^{10}. \quad (2)$$

Блок инерционности может находиться в одном из следующих состояний:

1. **Установившееся состояние**. Все инерционные процессы закончились, и блок находится в стационарном состоянии.

2. **Одиночное возбуждение**. Блок инерционности находится в одиночном возбуждении, если он находился в установившемся состоянии и значение сигнала на выходе из логического блока изменилось. Если новых изменений в логическом блоке не будет, то через время $\Delta t_{у}$ опять наступит установившееся состояние.

3. **Состояние суммирования возбуждения**. Блок переходит в состояние суммирования возбуждения, если он находился в одиночном возбуждении и значение сигнала в блоке логики изменилось.

Вводится переменная $Q_{вн}$ имитирующая внутреннее состояние системы. При установившемся состоянии $Q_{вн} = 1$ или $Q_{вн} = 0$.

Сначала рассмотрим поведение блока инерционности в случае определенного значения временных параметров ($\Delta t_{н}^{01}, \Delta t_{н}^{10}, \Delta t_{у}^{01}, \Delta t_{у}^{10}$ определенные числа, а не интервалы).

Одиночное возбуждение

Пусть t_0 момент перехода блока в состояние одиночного возбуждения, а $t_{мод}$ момент моделирования.

Ради определенности будем рассматривать переход с 0 в 1. Для обратного перехода все рассчитывается аналогично.

Состояние одиночного возбуждения разделяется на две стадии:

1. $t_0 \le t_{мод} \le t_{н}^{01} = t_0 + \Delta t_{н}^{01}$;
2. $t_0 \le t_{мод} \le t_{у}^{01} = t_0 + \Delta t_{у}^{01}$.

В рамках приближения считается, что изменение $Q_{вн}$ в обоих стадиях происходит линейно. На рис. 3 показан процесс перехода сигнала для одиночного перехода. Θ^{01} 0

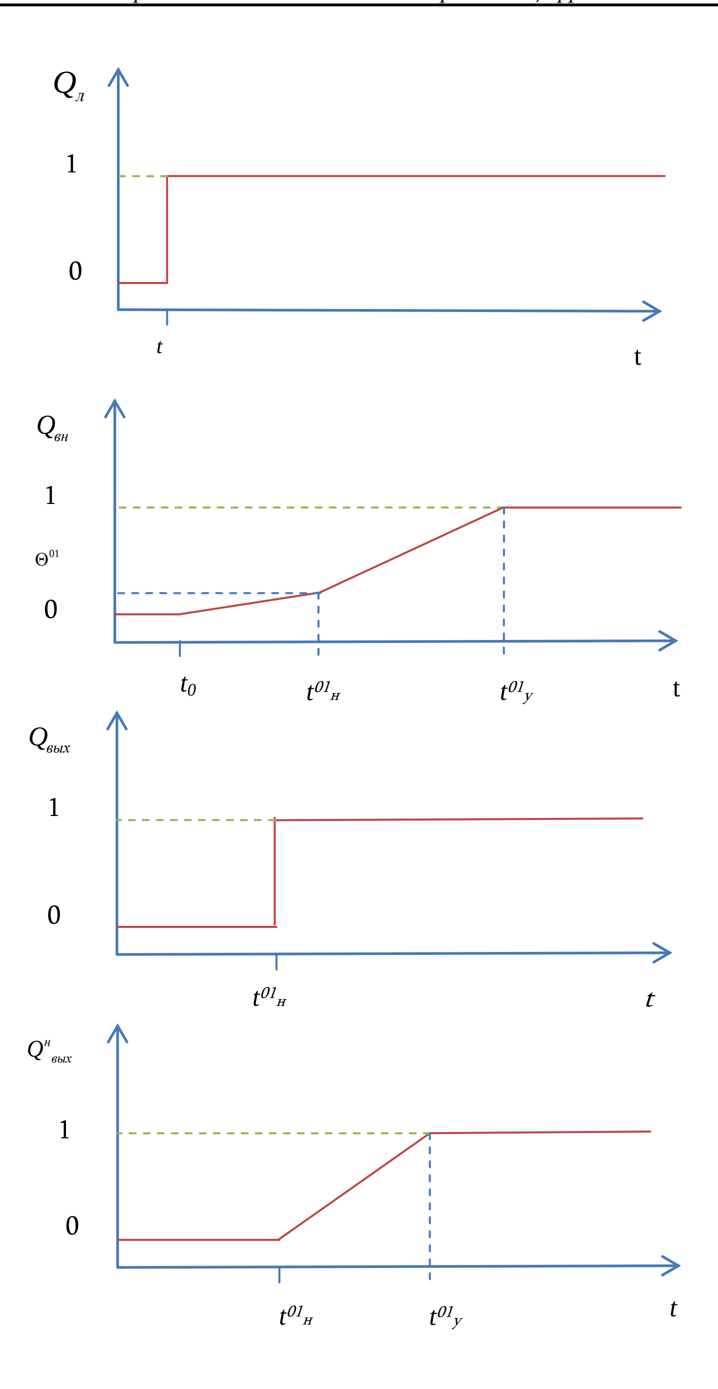


Рис. 3. Изменение сигналов при изменении значения в блоке логики с 0 в 1.

Пусть Θ^{01} значение внутреннего сигнала в момент времени $\Delta t_н^{01}$. Тогда скорость изменения внутреннего значения сигнала в интервалах времени $(t_0, \Delta t_н^{01})$ и $(\Delta t_н^{01}, \Delta t_у^{01})$ соответственно равняется:

$$S_1^{01} = \frac{\theta^{01}}{\Delta t_н^{01}} \tag{3}$$

и

$$S_2^{01} = \frac{1-\theta^{01}}{\Delta t_у^{01} - \Delta t_н^{01}}. \tag{4}$$

Заметим, что:

$$\Theta^{01} \neq \Theta^{10}. \tag{5}$$

Множественное возбуждение

С помощью программы SPICE было экспериментально показано, что если в интервале времени $\left(t_0, \Delta t_н^{01}\right)$происходит обратный переход, то момент начала спада происходит или в данном интервале, или до момента $t_у^{01}$.

Пусть время инерции переключения – $\tilde{\Delta} t$. С помощью моделирования на SPICE имеем:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta} t(t_н^{01}) = \Delta t_у^{01} - t_н^{01} \\ \tilde{\Delta} t(t_у^{01}) = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

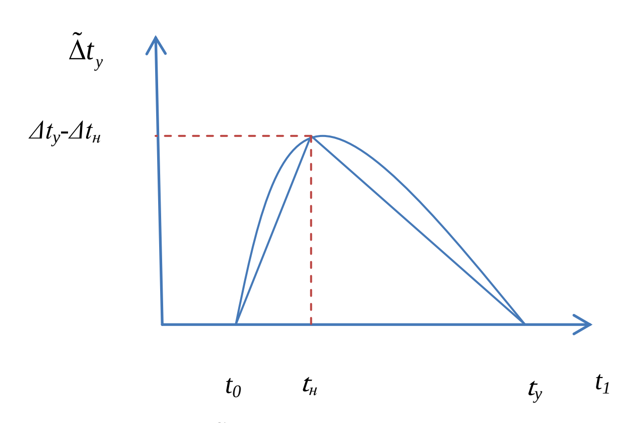


Рис. 4. Зависимость $\tilde{\Delta} t_у$ от времени и его линейная аппроксимация.

Принимая линейную аппроксимацию (см. рис. 4), получим:

$$\begin{cases} t_0 \le t_1 \le \Delta t_н^{01} \\ \tilde{\Delta} t = \dfrac{(\Delta t_у^{01} - \Delta t_н^{01})(t_1 - t_0)}{\Delta t_н^{01}}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta t_н^{01} \le t_1 \le \Delta t_у^{01} \\ \tilde{\Delta} t = (t_у^{01} - t_1) \end{cases}. \quad (8)$$

Если во время одиночного возбуждения значение на входе меняется, то блок инерционности переходит в состояние суммирования возбуждения.
Пусть t_1 момент изменения значения в логическом блоке.

Рассматривается два случая: новое возбуждение началось в момент $t_0 \le t_1 \le \Delta t_н^{01}$ и $\Delta t_н^{01} \le t_1 \le \Delta t_у^{01}$.

Случай 1: $t_0 \le t_1 \le \Delta t_н^{01}$

Если момент начала обратного переключения происходит до момента $t_2 = t_1 + \tilde{\Delta} t$, то на выходе из блока не наблюдается изменения сигнала. Поэтому возможны два подслучая.

Подслучай 1.1 $t_2 = t_1 + \tilde{\Delta} t \le \Delta t_н^{01}$**.**

Максимальное значение сигнала Q_m равняется:

$$Q_m = S_1^{01} * (t_2 - t_0). \quad (9)$$

После точки t_2 сигнал начинает стихать со скоростью S_2^{01}. Таким образом, если изменений в логическом блоке не будет, то блок инерции через время t_3 перейдет в установившееся состояние.

$$t_3 = t_2 + \frac{Qm}{S_2^{10}}. \quad (10)$$

Подслучай 1.2 $t_2 = t_1 + \tilde{\Delta} t > \Delta t_н^{01}$.

Сигнал до момента $t_н^{01}$ увеличивается со скоростью S_1^{01}, а после этого, на-

чиная со значения Θ^{01} сигнал растет со скоростью S_2^{01}.

Таким образом, максимальное значение сигнала в этом случае равняется:

$$Q_m = \Theta^{01} + S_2^{01}\left(t_2 - t_н\right), \tag{11}$$

где t_2 момент максимального значения сигнала и равняется:

$$t_2 = t_1 + \tilde{\Delta} t. \tag{12}$$

Если новых переключений в логическом блоке не будет, то через время t_3 настанет установившееся состояние.

$$t_3 = t_2 + \frac{Q_m}{S_2^{10}}. \tag{13}$$

Случай 2:

Во втором случае имеем $t_1 = t_у^{01}$. Из формулы (8) видно, что в блоке инерционности происходит полное срабатывание и в момент времени $t_у^{01}$ начинает обратный переход.

Будем моделировать $Q_{вых}^{н}$ как полное срабатывание с переходом в момент времени $t_н^{01}$.

Учет интервального характера временных параметров

Пусть $(\Delta t_н'^{01}, \Delta t_н''^{01})$, $(\Delta t_н'^{10}, \Delta t_н''^{10})$, $(\Delta t_у'^{01}, \Delta t_у''^{01})$, $(\Delta t_у'^{10}, \Delta t_у''^{10})$ интервалы, в которых может меняться $t_н$ и $t_у$. Блоки инерции с параметрами $\left\{\Delta t_н''^{01}, \Delta t_н'^{10}, \Delta t_у''^{01}, \Delta t_у'^{10}\right\}$ и $\left\{\Delta t_н'^{01}, \Delta t_н''^{10}, \Delta t_у'^{01}, \Delta t_у''^{10}\right\}$ две крайние случаи. В первом случае сигнал начинает увеличиваться первым, и начинает уменьшаться последним и является максимальным возможным сигналом, а во втором случае сигнал начинает уменьшаться первым и увеличивается последним и является минимальным возможным сигналом. Следовательно, реальный сигнал всегда будет меньше или равно максимальному крайнему сигналу и больше или равно минимальному крайнему случаю.

Как видно из рис. 5 б, на выходе $Q_{вых}$ в некоторых интервалах времени может поступать как значение, 1 так и 0.

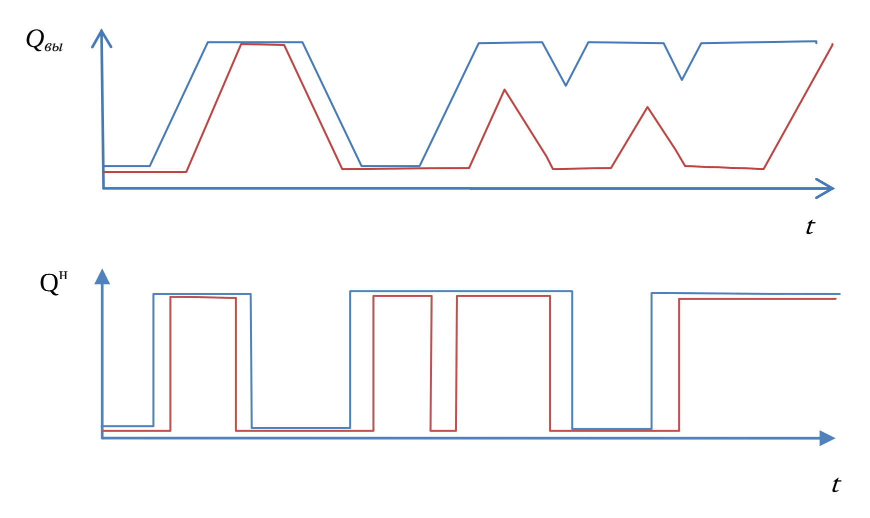


Рис. 5. $Q^{н}_{вых}$ (а) и $Q_{вых}$ (б) для двух крайних случаев.

При расчете возможных значений сигнала в цепи, а не в отдельном ЛЭ, рассчитываются максимальный и минимальный возможные сигналы и если они отличаются, то для расчета максимального возможного сигнала следующего элемента берется тот, при котором блок логики элемента даст максимальное значение. Другое значение применяется для расчета минимального возможного сигнала. Если в какой-то момент значения нескольких входов могут варьировать, то максимум или минимум ищется среди всевозможных комбинаций.

С помощью вышеприведенной модели возможно для каждого ЛЭ цифровой схемы оценить потенциальные ошибки.

Если для какого-то ЛЭ хотя бы в одном из граничных случаев при изменении значения логического блока переход в блоке инерционности не успевает произойти, то возникает вероятность ошибки.

Подобрав $\Delta t_{н}^{01} = \dfrac{\Delta t'^{01}_{н} + \Delta t''^{01}_{н}}{2}$ и $\Delta t_{у}^{01} = \dfrac{\Delta t'^{01}_{у} + \Delta t''^{01}_{у}}{2}$ (для $\Delta t_{н}^{10}$ и $\Delta t_{у}^{10}$ аналогично), получим наиболее вероятный сигнал на выходе.

В момент времени, когда максимально и минимально возможные сигналы совпадают на выходе, сигнал однозначен. В остальных случаях $Q_{вых}$ и $Q^{н}_{вых}$ могут варьировать.

Сравнение с другими моделями

На основе описанной модели была написана программа и проведено сравнение с другими моделями.

Ниже приводится графики участка сигнала, где сравнение разница работы моделей наиболее значима.

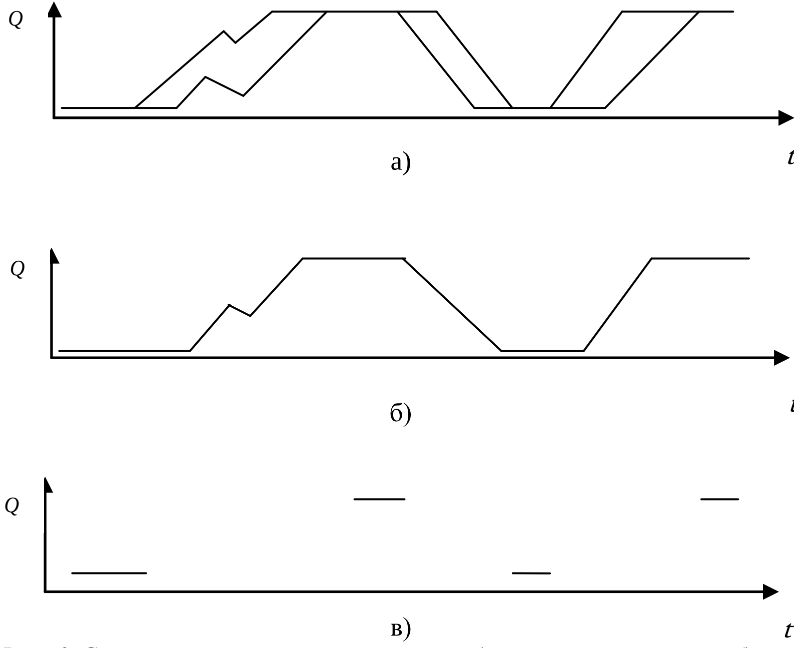


Рис. 6. Сравнение выходных сигналов, для: а) предлагаемая модель; б) модель предложенная в [1, 2]; в) простое интервальное моделирование [3–6].

Из рис. 6 видны разница работы и преимущества предложенной модели. В отличие от модели [1, 2] она выдает возможные интервалы варьирования сигнала и более точна. Преимущества по сравнению с моделью [3–6] тоже хорошо иллюстрируется на примере. В начале происходит неполное переключение. Модель [3–6] не учитывает, что после неполного переключения переход в стационарное состояние 1 произойдет быстрее, чем, если переход начинался бы со стационарного состояние 0. Тем самым в модели 2 делается более грубое приближение.

Заключение

Предложена модель для расчета сигнала и оценки задержек для больших интегральных схем в логическом уровне с учетом вариаций временных параметров. Алгоритм подразумевает расчет сигнала для всех логических элементов цепи для 3 разных значений временных параметров (минимально и максимально возможные значения и среднее значение), что дает возможность найти наиболее вероятный выходной сигнал, крайние случаи и дает возможность оценивать

возможные ошибки. Во всех расчетах применяется линейное приближение, за счет чего получаем высокую скорость работы алгоритма.

Описанная модель точнее, чем модель, предложенная в работах [1, 2] и оригинальная интервальная модель [3–6]. Предложенная модель примерно три раза уступает по скорости модель [1, 2], вместе с тем выдает более точную оценку работы ИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меликян В.Ш.* Теория моделирования и оптимизации цифровых схем с учетом дестабилиирующих факторов. Ер.: Чартарагет, 2011. СС. 77–135.

2. *Архангелский А.Я., Левшин Н.Г, Меликян В.Ш.* Принципы построения систем смешанного моделирования электронных схем // Автоматизация проектирования в радиоэлектронике и вычилителной технике. М.: Знание, 1984. СС. 91–93.

3. *Золоторевич Л.А.* Логическое Моделирвание MOS VLSI на основе интервальной временной алгебры //Автоматика и вычислительная техника, Рига, институт электроники и вычислительной техники, 2002 июль-август. СС. 61–69.

4. *Золоторевич Л.А.* Интервальная временная булева алгебра и ее применение для динамического анализа проектируемых устройств ЭВМ // Автоматика и вычислительная техника. Рига: Зинатне, 1984. СС. 81–88.

5. *Золоторевич Л.А., Рубин Е.Л.* Интервальное моделирование цифровых устройств со сходящимися ветвлениями // Проблемные вопросы автоматизации производства и обработки информации. Минск: Изд-во БГУ, 1987. СС. 93–103.

6. *Золоторевич Л.А.* Интервальное временное моделирование БИС на переключательном уровне // Автоматизация проектирования дискретных систем. Т. 3. Минск, 2001. СС. 89–95.

METHOD OF INTERVAL LOGICAL MODELING FOR DIGITAL CIRCUITS

Ashot Martirosyan

SUMMARY

The model of computing and assessment of the possible errors of the work of large integral circuits on the logical level, taking into account the time properties of logical elements. In the real circuits identical logical elements can have different time characteristics for each of them. As such, it is not the specific value, but rather the interval in which it can vary that is considered for this study. The method secures high speed of computations and is thus valid for computing test inputs and detecting errors during the modeling of the circuit.

ԹՎԱՅԻՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐԻ ՄԻՋԱԿԱՅՔԱՅԻՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ա.Ս. Մարտիրոսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Քննարկում է մեծ ինտեգրալ սխեմաների մոդելավորման տրամաբանական մակարդակում հաշվարկման և հնարավոր սխալների գնահատման մոդել, որը հաշվի է առնում տրամաբանական էլեմենտների ժամանակային բնութագրերը: Քանի որ իրական սխեմաներում միանման էլեմենտները կարող են ունենալ տարբեր ժամանակային բնութագրեր հաշվի ենք առնում ոչ թե կոնկրետ արժեք, այլ ինտերվալ, որում նրանք կարող են տատանվել: Մեթոդը արագագործ է, հետևաբար կարող է օգտագործվել թեստային մուտքերի հաշվարկման և հնարավոր սխալների գնահատման նպատակով:

УДК 621.391.15 Поступила 05.12.2013г.

РАЗБИЕНИЕ И СОВЕРШЕННЫЕ КОДЫ

Г.Л. Мовсисян

BIT Group, Moscow, Russia, garib@firmbit.ru

АННОТАЦИЯ

В данной работе мы рассматриваем разбиение n-мерного пространства подмножествами с «нулевым» ограничением. Приведены описания некоторых классов совершенных и квазисовершенных кодов в аддитивном канале. Предложен способ построения групповых кодов, исправляющих ошибки в аддитивном канале, являющимся далеким обобщением метода Хэмминга построения кодов.

Многие задачи дискретной оптимизации связаны с разбиением n-мерного пространства определенными подмножествами. При этом требования к подмножествам могут быть геометрического характера, например, шарообразность, или связаны с определенной метрикой, например, подмножества представляют из себя области Дирихле с метрикой Хэмминга $[1]$. Часто рассматриваются разбиения подмножествами, на которых оптимизируется некоторый функционал $[2]$.

В данной работе мы рассматриваем разбиение n-мерного пространства подмножествами с «нулевым» ограничением. Такие разбиения позволяют построить множество групповых кодов $\{V\}$ и множество каналов $\{A\}$ между любыми элементами V *и* A, которых имеются корректирующее отношение. Приведены описания некоторых классов совершенных и квазисовершенных кодов в аддитивном канале.

Предложен способ построения групповых кодов, исправляющих ошибки в аддитивном канале, являющимся далеким обобщением метода Хэмминга построения кодов.

§1.

Пусть $B = \{0,1\}$ – поле Галуа из двух элементов, и B^n – линейное векторное пространство над этим полем.

Рассмотрим семейство подмножеств $C_n(s_0,\ s_1,...,s_k) = \{C_i\}$, удовлетворяющие следующим условиям для всех $i = \overline{0,\ k}$:

1. $C_i \subseteq B^n$;

2. $C_i \cap C_j = \varnothing,\ i \neq j$; (1)

3. $|C_i| = s_i$;

4. $\sum_{x \in C_i} x = 0$ (суммирование ведется по $\mathrm{mod}2$).

Первые три свойства – это обычные свойства разбиения множества $C = \bigcup_{i=0}^{k} C_i$, а последнее «нулевое» отражает специфику дальнейшего использования при построении корректирующих кодов. Случай $C = B^n$ является особенно важным, т.к. он приводит к построению совершенных кодов.

В дальнейшем, термин разбиение множества $C_n(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ используется в смысле (1), т.е. разбиение с «нулевыми» подмножествами.

Задачи существования, построения и перечисления разбиения $C_n(s_0, s_1, \ldots, s_k)$, при заданных $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_k$ и *n*, представляют, кроме комбинаторно-множественного, еще и интерес в связи с использованием в построении корректирующих кодов. Стоит также отметить, что в теории корректирующих кодов области декодирования при требовании к ним условия попарного не пересечения, образуют разбиения пространства B^n. Следовательно, в свою очередь, некоторые классы кодов, в частности, совершенные коды в аддитивном канале, позволяют построить разбиения $C_n(s_0,\ s_1, \ldots, s_k)$. В дальнейшем, в примерах при $s_0 = 1$, мы пропустим подмножество C_0 состоящей из нулевого вектора – 0.

Пример 1. $C_4(1,\ 3,\ 6,\ 6) = \{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3\}$ – разбиение B^4, если

$$\begin{matrix} C_1 & C_2 & & & C_3 & & & \\ 1\ 1\ 0\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0\ 1\ 0\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Пример 2. $C_4(1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3) = \{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5\}$ является разбиением пространства B^4, при

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
1 1 0 0	0 0 1 1	1 1 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1
0 1 0 0	0 0 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1	1 0 0 1.
1 0 0 0	0 0 1 0	1 0 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0

Пример 3. $C_4(1,\ 5,\ 5,\ 5) = \{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3\}$ является разбиением пространства B^4 при

C_1 C_2 C_3

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1

Из приведенных выше примеров не трудно понять, что пространство B^n можно разбить разными способами и по количеству, и по мощности подмножеств. А также из разбиения $\{C_0,\ C_1,...,C_k\}$ множества $\bigcup_{i=0}^{k} C_i$ можно получить разбиение множества $\bigcup_{i=0}^{k} C_i \setminus C_j$, удалив из $\{C_0,\ C_1,...,C_k\}$ подмножество C_j.

Приведем без доказательства следующую лемму, описывающую некоторые очевидные свойства разбиения $C_n(s_0, s_1,..., s_k) = \{C_0, C_1,..., C_k\}$.

Лемма 1. Для любых $z_1 \in C_i$, $z_2 \in C_j$, $z_1 \neq z_2$ имеет место:

а) $z_1 \oplus z_2 \neq 0$;

б) $z_1 \oplus \sum_{z \in C_j \setminus z_2} z \neq 0$;

в) $z_2 \oplus \sum_{z \in C_i \setminus z_1} z \neq 0$;

г) $\sum_{z \in \{C_i \setminus z_1\} \cup \{C_j \setminus z_2\}} z \neq 0$.

Если $s_{i+j} = s$ для $j = 1,2,...,k-i$, то положим $C_n(s_0,..., s_i, s)$ = $C_n(s_0, s_1,...s_k)$.

Далее в этом параграфе рассматриваются разбиения $C_n(s_0,\ s)$. При этом всегда необходимым условием существования $C_n(s_0,\ s)$ разбиения является нечетность числа s, если s_0 – нечетное число.

Следующая конструкция прямого произведения позволяет строить новые разбиения из заданных.

Лемма 2. Если $C_{n_1}(1,s)$, $C_{n_2}(1,s)$ являются разбиениями пространств B^{n_1} и B^{n_2} соответственно, то существует $C_{n_1+n_2}(1,s)$ разбиение пространства $B^{n_1+n_2}$.

Доказательство.

Пусть $C_{n_1}(1,s)=\{C_0,\ C_1,...,C_{k_1}\}$, $C_{n_2}(1,s)=\{C_0^0,\ C_1^0,...,C_{k_2}^0\}$.

$$C_i=\{x_1^i,\ x_2^i,...,x_s^i\},\quad 1\le i\le k_1,$$

$$C_j^0=\{y_1^j,\ y_2^j,...,y_s^j\},\quad 1\le j\le k_2.$$

Для любой пары C_i, C_j^0 прямое произведение – множество $C_i\times C_j^0$ представим в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} (\ x_1^i & y_1^j\ ) & ... & (\ x_1^i & y_s^j\ ) \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ (\ x_s^i & y_1^j\ ) & ... & (\ x_s^i & y_s^j\ ) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Определим множества $C_{ij}^1,...,C_{ij}^s$ следующим образом:

а) для любых $1\le p\le s$, $1\le i\le k_1$, $1\le j\le k_2$ множество C_{ij}^p содержит только один элемент из любой строки и из любого столбца матрицы (3), и удовлетворяет условию: все множества C_{ij}^p попарно не пересекаются и имеют мощность s;

б) $C_{i0}^1=C_i\times C_0^0$, $i=\overline{0,\ k_1}$;

в) $C_{0j}^1=C_0\times C_j^0$, $j=\overline{0,\ k_2}$.

Рассмотрим множество

$$C^0=\{C_{ij}^p,\ i=\overline{1,k_1},\quad j=\overline{1,k_2},\quad p=\overline{1,s}\}\cup\{C_{i0}^1,\ i=\overline{0,k_1}\}\cup\{C_{0j}^1,\ j=\overline{0,k_2}\}.$$

Из определения C_{ij}^p при $i=\overline{1,\ k_1}$, $j=\overline{1,\ k_2}$, $p=\overline{1,\ s}$ и C_{i0}^1, C_{0j}^1 при $i=\overline{1,\ k_1}$, $j=\overline{1,\ k_2}$ имеем, что

$$\sum_{x\in C_{ij}^p} x=0 \text{ (суммирование ведется по } \mathrm{mod}2\text{)},$$

и поскольку

$$\left|\bigcup_{C\in C^0} C\right| = \left|\bigcup_{i,j,p} C_{ij}^p\right| = \sum_{i,j,p}\left|C_{ij}^p\right| - 1 = \sum_{i=0}^{k_1}\left|C_i\right| + \sum_{j=0}^{k_2}\left|C_j^0\right| + \sum_{\substack{1\le i\le k_1\\ 1\le j\le k_2}}\left|C_i\right|\left|C_j^0\right| - 1 = 2^{n_1+n_2} ,$$

то $C_{n_1+n_2}(1,s) = C^0$ – является разбиением пространства $B^{n_1+n_2}$.

Теорема 1. Если s является делителем 2^n-1, а 2^r-1 – делителем s для некоторого натурального числа $r>1$, то $C_n(1,s)$ и $C_n\left(1,\dfrac{2^n-1}{2^r-1}\right)$ являются разбиениями пространства B^n.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $n = m\cdot r$. Применим метод индукции по m.

При $m=1$ представим B^r в виде $B^r = \left(C_0 \bigcup \left(B^r\right) \setminus C_0\right)$, где $C_0 = \{0\}$. Понятно, что имеем тривиальное $C_r\left(1,2^r-1\right)$ разбиение B^r.

Предположим, что для m существует $C_{mr}\left(1,2^r-1\right)$ разбиение пространства B^{mr}.

Применяя лемму 2, относительно $C_r\left(1,2^r-1\right)$ разбиения B^r и $C_{mr}\left(1,2^r-1\right)$ разбиения B^{mr}, получаем $C_{(m+1)r}\left(1,2^r-1\right)$ разбиение для $B^{(m+1)r}$. Следовательно, существует $C_n\left(1,2^r-1\right) = \left\{C_0,\ C_1,\dots,C_k\right\}$ разбиение B^n, где $k = \dfrac{2^n-1}{2^r-1}$.

Рассмотрим $C_n(1,s) = \left\{C_0^0,\ C_1^0,\dots,C_p^0\right\}$, где $p = \dfrac{2^n-1}{s}$, а C_i^0 определяется следующим образом:

$$C_0^0 = C_0,\ C_i^0 = \bigcup_{j=1}^{l} C_{(i-1)l+j},\ i=\overline{1,\ p},\ l = \frac{s}{2^r-1}.$$

Нетрудно доказать, что $C_n(1,s)$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Следовательно, является разбиением B^n. Что и требовалось доказать.

Теперь докажем существование разбиения $C_n\left(1,s_1\right)$, где $s_1 = \dfrac{2^n-1}{2^r-1}$.

Для $n\le 4$ утверждение верно. Предположим, что для всех $m<n$ утверждение тоже верно и докажем для n.

Представим $B^n = B^r\cdot B^m$, где $B^r = \left\{x_0,\ x_1,\dots,x_{2^r-1}\right\}$, $x_0 = 0$.

Поскольку s_1 – целое число и $s_1 - 1 = \dfrac{2^r\left(2^m-1\right)}{2^r-1}$, то $\dfrac{2^m-1}{2^r-1}$ – целое чис-

ло. Следовательно, $\dfrac{s_1-1}{2^r}$ тоже целое число. Далее, поскольку $2^m-1=\left(2^r-1\right)\left(\dfrac{s_1-1}{2^r}\right)$, то, согласно предположению, существует $C_m\left(1,\dfrac{s_1-1}{2^r}\right)=\left\{C_0^0,\ C_1^0,...,\ C_{2^r-1}^0\right\}$ разбиение пространства B^m.

Рассмотрим

$C_n(1,s_1)=\left\{C_0^0,\ C_1^0,...,\ C_{2^r-1}^0\right\}$, где $C_i=\left(x_i\times B^m\bigcup x_i\times C_i^0\right)$, $C_i\subseteq B^n$, $i=\overline{0,\ 2^r-1}$.

Поскольку $C_i\bigcap C_j\neq 0$, при $i\neq j,\ 0\leq i,\ j\leq 2^r-1$ и $\sum\limits_{x\in C_i}x=0$,

$\left|C_i\right|=s_1$, для всех $i=\overline{1,\ 2^r-1}$, то достаточно доказать, что $\sum\limits_{i=0}^{2^r-1}\left|C_i\right|=2^n$.

$$\sum_{i=0}^{2^r-1}\left|C_i\right|=1+\sum_{i=1}^{2^r-1}\left|C_i\right|=1+\sum_{i=1}^{2^r-1}\left|\left(x_i\times B^m\bigcup x_i\times C_i^0\right)\right|=1+\sum_{i=1}^{2^r-1}\left|B^m\right|+\sum_{i=1}^{2^r-1}\left|C_i^0\right|=2^n.$$

То есть, $C_n\left(1,\dfrac{2^n-1}{2^r-1}\right)$ является разбиением B^n.

Что и требовалось доказать.

§2.

В этом параграфе, используя разбиение подмножества n-мерного пространства «нулевыми» подмножествами, описывается алгоритм построения множеств групповых кодов и множеств каналов. Доказывается, что любой код из построенного множества исправляет все ошибки любого аддитивного канала из множества соответствующих каналов.

Аддитивный канал задается множеством векторов ошибок $A=\left\{y_0,\ y_1,...,y_m\right\}\subseteq B^n$, и любой вектор y на выходе такого канала имеет вид

$$y=x\oplus y_k,$$

где $x\in B^n$ исходный вектор, $y_k\in A$, а $\oplus$ операция сложения по $\bmod 2$ [3].

Окрестности t -ого порядка вектора $x\in B^n$ по $C\in B^n$ определим следующим образом [4]:

$$C^t(x)=\left\{x_0\oplus y,x_0\in C^{t-1}(x),\ \ y\in C\right\};\ C^0(x)=x.$$

Поскольку $\left|C^t(x)\right|$ не зависит от x, то мы будем использовать обозначение $C^t = \left|C^t(x)\right|, \quad x \in B^n$.

Код V исправляет ошибки аддитивного канала $A = \{y_0, \ y_1, ..., y_m\}$, если выполнены условия:

$$A^1(v_i) \cap A^1(v_j) = \emptyset \text{, где } v_i, v_j \in V, \ v_i \neq v_j .$$

Классические границы Хэмминга и Варшамова-Гилберта для мощности кода $V \subseteq B^n$, исправляющие ошибки аддитивного канала A, выглядят следующим образом [5].

$$\frac{2^n}{A^2} \leq |V| \leq \frac{2^n}{A^1} .$$

Для заданного канала A основной задачей является построение кода максимального объема, исправляющего ошибки канала A.

Код $V \subseteq B^n$ называется совершенным для аддитивного канала $A \subseteq B^n$, если выполняется равенство

$$|V| = \frac{2^n}{A^1} . \qquad (4)$$

Код $V \subseteq B^n$ называется квазисовершенным для канала $A \subseteq B^n$, если для некоторого $C \subseteq A^2(0) \setminus A^1(0)$ код V является совершенным для канала $A \cup C$.

Другими словами, квазисовершеный код V для канала A удовлетворяет условиям:

1. $A^1(v_i) \cap A^1(v_j) = \emptyset, \ v_1, v_j \in V, \ v_i \neq v_j$;
2. $\bigcup\limits_{v \in V} A_1^2(v) = B^n$, где $A_1 = A \cup C$.

Обозначим через $[n, l, A]$ групповой код из B^n размерности l исправляющий все ошибки аддитивного канала A.

Произведение булевой матрицы $H = \{a_{ij}\}$ размерностью $m \times n$ и вектора $x^T = (x_1 \ x_2 \ ... x_n)^T$ определим следующим образом:

$$Hx^T = (z_1 \, z_2 ... z_m),$$

где $z_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (суммирование ведется по $\mathrm{mod} 2$).

Любая $(0,1)$ матрица H размерности $(n-l,\ n)$ называется проверочной для кода $[n,l,A]$, если для всех кодовых векторов x и только для них имеет место равенство:

$$Hx^T = 0,$$

где все операции производятся по $\mathrm{mod}2$ (см. $[6]$).

Для построения группового кода V, исправляющего ошибки аддитивного канала, мы будем использовать следующую конструкцию, связанную с приведенными выше разбиениями. При этом мы сначала строим аддитивный канал, а потом групповой код, исправляющий ошибки этого канала.

Пусть $(s_0 = 0, s_1, ..., s_k)$ целые неотрицательные числа, а множество $\{i_0 = 0, i_1, ..., i_p\} \subseteq \{0,1,...,k\}$, где $i_0 < i_1 < i_2 < ... < i_p$.

Рассмотрим матрицы a_i следующего вида:

$$a_i = \begin{cases} E \text{ - если } i \in \{i_1, i_2 ..., i_p\}, \\ E \text{ или } \overline{E}, \text{если } i \in \{1,2,...,k\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_p\}. \end{cases}$$

Здесь E – единичная матрица порядка s_i, а $\overline{E}$ – логическое отрицание E.

Построим канал $A \subseteq B^{n_k}$, где $n_l = \sum_{j=0}^{l} s_j$, $l = \overline{0,k}$, состоящий из векторов $x_i = 0^{n_i - s_i} 1^{s_i} 0^{n_k - n_i}$, где $i \in \{i_0, i_1, ..., i_p\}$, и из всех строк булевой матрицы, задаваемой следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & a_k \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Пример 4. Построим канал для случая: $s_0 = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$, $s_4 = 5$, а $i_0 = 0$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$. Пользуясь определением чисел n_i и векторов x_i, получаем: $n_0 = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 8$, $n_4 = 13$, $x_0 = 0^{13}$, $x_1 = 1^2 0^{11}$, $x_2 = 0^2 1^2 0^9$, $x_4 = 0^8 1^5$.

Поскольку
$a_3 \in \{E, \overline{\mathrm{E}}\}$, то каналы $A_1, A_2 \subseteq B^{13}$ имеют следующий вид:

```
A1 A2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0   0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0   1 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0   0 1 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0   0 0 1 0  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0   0 0 0 1  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0   0 0 0 0  0 1 1 1  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0   0 0 0 0  1 0 1 1  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0   0 0 0 0  1 1 0 1  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0   0 0 0 0  1 1 1 0  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0   0 0 0 0  0 0 0 0  1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0   0 0 0 0  0 0 0 0  0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0   0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0   0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1   0 0 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0   1 1 0 0  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0   0 0 1 1  0 0 0 0  0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1   0 0 0 0  0 0 0 0  1 1 1 1 1
```

Замечание 1. Поскольку при построении канала, блок a_i для всех $i \notin \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ определяется двумя способами, то множество $A(i_0,\ i_1, ...,\ i_p)$ таких каналов имеет мощность:

$$\left|A(i_0,\ i_1, ...,\ i_p)\right| = 2^{k-p}.$$

Пусть $\mathrm{n} = \left]\log_2 \sum_{i=0}^{k} \bar{s}_i\right[$, где $\bar{\mathrm{s}}_\mathrm{i} = \begin{cases} s_i + 1, & \text{если } i \in \{i_0, i_1, ..., i_p\} \\ s_i, & \text{в противном случае} \end{cases}$

Ясно, что $n_k \le 2^n - 1 - p$ и описанный выше канал A имеет мощность

$$|A| = n_k + 1 + p\,. \tag{6}$$

Пусть $C_n(\bar{s}_0, \bar{s}_1, ..., \bar{s}_k) = \{C_0, C_1, ..., C_k\}$ – одно из разбиений, описанных выше. Преобразуем семейство $C_n(\bar{s}_0, \bar{s}_1, ..., \bar{s}_k)$ следующим образом: из всех C_i, $i \in \{i_0, i_1, ..., i_p\}$ выбросим по одному вектору z_i, а другие сохраним в прежнем

виде. Полученное семейство мы обозначим через $\{\overline{C}_0, \overline{C}_1, ..., \overline{C}_k\}$, где

$$\overline{C}_i = \begin{cases} C_i \setminus z_i, \text{ если } i \in \{i_0, i_1 ..., i_p\} \\ C_i, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 2. Множество $\overline{C}_i$ зависит от выбора вектора z_i из C_i, а проверочная матрица $H(z_{i_0}, z_{i_1}, ..., z_{i_p}) = (\overline{C}_1^T \ \overline{C}_2^T ... \ \overline{C}_k^T)$ однозначно определяет код $V(z_{i_0}, z_{i_1}, ..., z_{i_p})$, следовательно, множество кодов $V(i_0, i_1, ..., i_p) = \{V (z_{i_0}, z_{i_1}, ..., z_{i_p}), z_{i_j} \in C_{i_j}, j = 0, 1, ..., p\}$ имеет мощность

$$|V(i_0, i_1, ..., i_p)| \le \prod_{i=1}^{k} \bar{s}_i!.$$

Рассмотрим групповой код $V \in V(i_0, i_1, ..., i_p)$ из B^{n_k} с проверочной матрицей

$H \in H(i_0, i_1, ..., i_p)$, и аддитивный канал $A \in A(i_0, i_1, ..., i_p)$.

Докажем, что групповой код $V \subseteq B^{n_k}$, для которого H является проверочной матрицей, исправляет все ошибки канала $A \in A(i_0, i_1, ..., i_p)$, т.е. $V = [n_k, n_k - n, A]$. Для этого достаточно доказать, что для любых $x, y \in A$, $x \ne y$, имеет место $x \oplus y \notin V$.

Пусть $x = (x_1 x_2 ... x_k)$, $y = (y_1 y_2 ... y_k)$, где $x_i, y_i \in B^{s_i}$ для всех $i = \overline{1,k}$. При этом легко показать, что

$$\|x_i\| \in \{0, 1, \bar{s}_i - 1\}, \ \|y_j\| \in \{0, 1, \bar{s}_j - 1\}, \ i, j \in \{1, 2, ..., k\}. \tag{7}$$

Отсюда, с учетом того, что $H = (\overline{C}_1^T \ \overline{C}_2^T ... \ \overline{C}_k^T)$ имеет размерность $n \times n_k$, и номера столбцов подматрицы $\overline{C}_i^T$ совпадают с номерами столбцов матрицы (5), где расположен блок a_i, получаем

$$H(x \oplus y)^T = \sum_{i=1}^{k} \overline{C}_i^T (x_i \oplus y_i)^T = \sum_{i=1}^{k} (x_i \oplus y_i) \overline{C}_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{C}_i \oplus \sum_{j=1}^{k} y_j \overline{C}_j . \tag{8}$$

Из определения канала A имеем:

а) существует i из $\{1, 2, ..., k\}$, такое, что для всех $j \in \{1, 2, ..., k\} \setminus i$ вектор x_j – является нулевым;

б) существует j из $\{1,2,...,k\}$, такое, что для всех $i \in \{1,2,...,k\} \setminus j$ вектор y_i – является нулевым.

Отсюда, с учетом (8), получаем: существует пара $i, j \in \{1,2...k\}$, для которой

$$H(x \oplus y)^T = x_i \overline{C_i} \oplus y_j \overline{C}_j . \qquad (9)$$

Из построения матрицы H следует, что все столбцы разные, следовательно, для любого вектора $z \in V$ равенство $Hz^T = 0$ имеет место, если $\|z\|$ – вес Хэмминга вектора z больше двух. Поэтому рассмотрим $x, y \in A$, для которых $\|x \oplus y\| > 2$.

Возможны следующие случаи:

а) векторы x, y являются строками матрицы (5). Тогда из (7) имеем:

$$\|x_i\| \in \{1, \bar{s}_i - 1\}, \ \|y_j\| \in \{1, \bar{s}_j - 1\}.$$

Отсюда и из (9) следует, что существуют векторы $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_j$, такие, что

$$H(x \oplus y)^T = \begin{cases} \\ \mathrm{z}_1 \oplus z_2, \text{ если } \|x_i\| = 1, \|\mathrm{y}_\mathrm{j}\| = 1, \\ z_1 \oplus \sum\limits_{z \in C_j \setminus z_2} z, \text{ если } \|x_i\| = 1, \|\mathrm{y}_\mathrm{j}\| = \bar{s}_j - 1, \\ \sum\limits_{z \in C_i \setminus z_1 \cup C_j \setminus z_2} z \quad, \text{ если } \|x_i\| = \bar{s}_i - 1, \|y_j\| = \bar{s}_j - 1. \end{cases}$$

Применив лемму 1, получаем: $H(x \oplus y)^T \neq 0$, т.е. $x \oplus y \notin V$.

б) Только один из векторов x, y является строкой матрицы (5). Тогда из (7) имеем: $\|x_i\| \in \{1, \bar{s}_i - 1\}, \|\mathrm{y}_\mathrm{j}\| = \{0, \bar{s}_j - 1\}$.

Отсюда и из (9) следует, что существуют векторы $z_1 \in C_i$, $z_2 \in C_j$ такие, что:

$$H(x \oplus y)^T = \begin{cases} \mathrm{z}_1, \text{ если } \|x_i\| = 1, \|\mathrm{y}_\mathrm{j}\| = 0, \\ z_1 \oplus \sum\limits_{z \in C_j \setminus z_2} z, \text{ если } \|x_i\| = 1, \|\mathrm{y}_\mathrm{j}\| = \bar{s}_j - 1, \\ \sum\limits_{z \in C_i \setminus z_1} z, \text{ если } \|x_i\| = \bar{s}_i - 1, \|y_j\| = 0, \\ \sum\limits_{z \in C_i \setminus z_1 \cup C_j \setminus z_2} z \quad, \text{ если } \|x_i\| = \bar{s}_i - 1, \|y_j\| = \bar{s}_j - 1. \end{cases}$$

Применив лемму 1, получаем: $H(x \oplus y)^T \neq 0,$ т.е. $x \oplus y \notin V.$

в) Оба вектора не являются строками матрицы (5). Тогда из (7) имеем:

$$\|x_i\| \in \{0, \bar{s}_i - 1\}, \|\mathrm{y}_{\mathrm{j}}\| = \{0, \bar{s}_j - 1\}.$$

Отсюда и из (9) следует, что существуют векторы $z_1 \in C_i, \mathrm{z}_2 \in C_j$ такие, что:

$$H(x \oplus y)^T = \begin{cases} \sum\limits_{\mathrm{z} \in \mathrm{C_i} \setminus \mathrm{z}_1} \mathrm{z}, \text{ если } \|x_i\| = \bar{s}_i - 1, \|y_j\| = 0, \\ \sum\limits_{z \in C_j \setminus \mathrm{z}_2} z, \text{ если } \|x_i\| = 0, \|\mathrm{y}_{\mathrm{j}}\| = \bar{s}_j - 1, \\ \sum\limits_{z \in C_i \setminus z_1 \cup C_j \setminus z_2} z \quad, \text{ если } \|x_i\| = \bar{s}_i - 1, \|y_j\| = \bar{s}_j - 1. \end{cases}$$

Опять, применив лемму 1, получаем, что для любых векторов $x, y \in A$, $x \neq y$ имеет место $H(x \oplus y)^T \neq 0$, т.е. $(x \oplus y) \notin V$.

Следовательно, $V = [n_k, \; n_k - n, \; A]$. В результате мы имеем, что любой код $V \in V(i_0, \; i_1, ..., i_p)$ исправляет ошибки любого канала A из множества $A(i_0, i_1, ..., i_p)$. Далее, если $C_n(s_0, \; s_1, ..., s_k)$ является разбиением B^n, то выполняется равенство: $n_k = 2^n - 1 - p$. Отсюда и из (6) следует, что код то $V = [n_k, \; n_k - n, \; A]$ удовлетворяет условию (4), то есть является совершенным. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Если $C_n(s_0, \; s_1, ..., s_k) = \{C_0, \; C_1, ..., C_k\}$, то любой групповой код $V \in V(i_0, i_1, ..., i_p)$ исправляет все ошибки любого канала $A \in A$ $(i_0, \; i_1, ..., \; i_p)$, т.е. $V = [n_k, \; n_k - n, \; A]$.

Следствие 1. Если $C_n(s_0, \; s_1, ..., s_k) = \{C_0, \; C_1, ..., C_k\}$ является разбиением пространства B^n, то любой групповой код $V \in V(i_0, \; i_1, ..., i_p)$ исправляет ошибки любого канала $A \in A(i_0, i_1, ..., i_p)$ и является совершенным.

Замечание 3. При $C_n(1, s) = \{C_0, C_1\}$ вышеописанный способ построения групповых кодов – это метод Хэмминга построения групповых кодов, исправляющих ошибки канала $A = \{0^n, 0^i 10^{n-i-1}; \quad i = 1, 2, ..., n-1\}$.

Теперь в описанном выше алгоритме построения множество каналов выберем $\{i_0, i_1, ..., i_p\}$ исходя из условий

$$\{1,\ 2, ...,\ k\} \setminus \{i_0,\ i_1, ..., i_p\} \subseteq \{i \setminus s_i - \text{нечетное число}\}.$$

Построим множество каналов $\overline{A}(i_0, i_1, ..., i_p) \subseteq A(i_0,\ i_1, ...,\ i_p)$ следующим образом: любой канал $A \in \overline{A}(i_0, i_1, ..., i_p)$ состоит из векторов $x_i = 0^{n_i - s_i} 1^{s_i} 0^{n_k - n_i}$, $i \in \{i_0,\ i_1, ..., i_p\}$, где $n_l = \sum_{j=1}^{l} s_j$, $l = \overline{0, k}$ и из всех строк булевой матрицы, задаваемой следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & a_k \end{pmatrix}.$$

При этом a_i – матрица размерностью $(s_i \times s_i)$ вида

$$a_i = \begin{cases} E - \text{если} \quad i \in \{i_1,\ i_2, ...,\ i_p\}, \\ \overline{E} - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что описанная выше процедура построения однозначно определяет множество
$\overline{A}(i_0, i_1, ..., i_p)$ нулевых каналов, для которого $|\overline{A}\ (i_0, i_1, ..., i_p)\ |=1$.

Следовательно, имеет место:

Следствие 2. Если $C_n(s_0,\ s_1, ..., s_k) = \{C_0,\ C_1, ..., C_k\}$ является разбиением пространства B^n, то совершенный код $V \in V(i_0,\ i_1, ...,\ i_p)$ исправляет ошибки нулевого канала $\overline{A}(i_0, i_1, ..., i_p)$.

Следствие 3. Совершенный код $V = [n,\ l,\ A]$ однозначно определяет разбиение $C_n(1,\ 2^{n-l} - 1,\ 2^{n-l}) = \{0^n,\ A^1(0\ ) \setminus 0\ ,\ A^1(x),\ x \in V \setminus 0\ \}$ пространства B^n, если A нулевой канал.

Пример 5. Рассмотрим разбиение $C_3(1,3,4) = \{0\ ,\ C_1,\ C_2\}$, где

$C_1 \quad C_2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Выбрав $\{z_0, \ z_2\} = \{0 \ , \ (111)\}$ получаем проверочную матрицу $\left(\overline{C}_1^T \ \overline{C}_2^T\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, соответствующий совершенный код $V\{z_0, \ z_2\} = \{(000000), \ (100110), \ (010101), \ (110011)\}$ исправляет ошибки нулевого канала A следующего вида:

0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0

В результате мы получаем код $V\{z_0, z_1, z_2\} = [5, \ 2, \ A]$. Поскольку все $A^1(x)$ при $x \in V\{z_0, z_1, z_2\}$ являются нулевыми множествами и разбивают B^5, то имеем разбиение $C_5(1, \ 7, \ 8) = \{0, \ A^1(0 \ ) \setminus 0, \ A^1(x), \ x \in V(z_0, z_1, z_2) \setminus 0\}$. Теперь из этого разбиения аналогичным образом можем получить следующий совершенный код и следующее разбиение.

Следовательно, следствие 1, следствие 2 и следствие 3 позволяют построить последовательность разбиений пространства и последовательность совершенных кодов.

Пример 6. Из примера 1 имеем разбиение $C_4(1,3,6,6) = \{C_0, \ C_1, \ C_2, \ C_3\}$ пространства B^4.

$$C_1 \; C_2 \; C_3$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Пользуясь этим разбиением, при $p = 0$ получаем матрицу $\left(\overline{C}_1^T \; \overline{C}_2^T \; \overline{C}_3^T\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая является проверочной матрицей совершенного кода $[15,\ 11,\ A]$, где канал $A \in A(0)$ выглядит следующим образом

$$\begin{array}{ccc|cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Пример 7. Как и в предыдущем примере воспользуемся разбиением $C_4(1,3,6,6)=\{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3\}$, и для $p=1$, $\{i_0,\ i_1\}=\{0,\ 3\}$, $z_3=(\ 0011\ )$ построим $\overline{C}_1,\ \overline{C}_2,\ \overline{C}_3$

$$\overline{C}_1\ \overline{C}_2 \qquad\qquad \overline{C}_3$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Далее построим матрицу $\left(\overline{C}_1^T\ \overline{C}_2^T\ \overline{C}_3^T\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая является проверочной матрицей кода $[14,\ 10,\ A]$, где A – один из каналов в множестве $A(0,3)$. Например:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Следствие 4. Если $C_n(s_0,\ s_1,...,s_k)=\{C_0,\ C_1,...,C_k\}$ является разбиением пространства B^n, и для некоторого целого $l \le k$ имеет место $s_{j_1}=s_{j_2}=...=s_{j_l}=3$, $\{i_1,\ i_2,...,\ i_p\}\subseteq\{j_1,\ j_2,...,\ j_l\}$, то групповой код с проверочной матрицей $H \in H(p)$ является 1- квазисовершенным.

Пример 8. Рассмотрим разбиение $C_4(1{,}3{,}6{,}6)=\{C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3\}$ пространства B^4 из примера 1.

$$
\begin{array}{cccc}
C_1 & C_2 & & \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccccccc}
 & & C_3 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Для $p=1$ и $\{i_0,\ i_1\}=\{0,\ 1\}$, $z_1=(\ 1100\ )$ построим $\overline{C_1},\ \overline{C_2},\ \overline{C_3}$

$$\begin{array}{ccc} \overline{C}_1 \ \overline{C}_2 & & \overline{C}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Далее построим матрицу $\left(\overline{C}_1^T \ \overline{C}_2^T \ \overline{C}_3^T\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая является проверочной матрицей кода $[14,\ 10,\ A]$, где A – один из каналов в множестве $A(0,1)$. Например:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

§3.

В этом параграфе рассмотрим случай: $s_i = s$, $i = \overline{1,\ k}$. Интерес к этому случаю объясняется следующим обстоятельством: согласно теореме 1, существование разбиения в B^n зависит только от параметров n и s. Что упрощает алгоритм построения кодов и каналов связи, описанный в §2. Кроме этого, в случае $s_i = s$ также упрощается классификация построения кодов и каналов.

Из теоремы 1 и теоремы 2, изложенной, соответственно, в §1 и §2. следует утверждение:

Теорема 3. Если s является делителем $2^n - 1$, а $2^r - 1$ – делителем s, для некоторого натурального числа $r > 1$, то при $A \in A(i_0, i_1, ..., i_p)$ существуют совершенные коды $[n_k,\ n_k - n,\ A]$, для $k = \dfrac{2^n - 1}{s}$, $s_i = s$ и для $k = 2^r - 1$, s_i $= \dfrac{2^n - 1}{2^r - 1}$, где $n_k = 2^n - 1 - p$, $0 \le p \le k$.

Доказательство аналогично к доказательству Теоремы 2, поэтому пропускаем.

В следующих двух примерах мы для одного разбиения построим два раз-

ных канала и соответствующие коды, используя параметр $p(p=0,\ \ p=2)$.

Пример 9. С помощью разбиения $C_4(1,\ 3)=\{C_0,\ C_1,...,C_5\}$ пространства B^4 из примера 2

$$\begin{array}{cccc@{\qquad}cccc@{\qquad}cccc@{\qquad}cccc@{\qquad}cccc}
 & C_1 & C_2 & & & & & & & & C_3 & & & & C_4 & & & & C_5 & \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1, \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

для $p=0$ получаем проверочную матрицу $\left(\overline{C}_1^T\ \overline{C}_2^T\ \overline{C}_3^T\ \overline{C}_4^T\ \overline{C}_5^T\right)$.

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix},$$

которая является проверочной матрицей для совершенного кода $[15,\ 11,\ \ A]$, где канал $A\in A(0)$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Пример 10. Используя разбиение $C_4(1,\ 3)=\{C_0,\ C_1,...,C_5\}$ пространства B^4, из примера 2 построим $\overline{C}_0,\ \overline{C}_1,\ \overline{C}_2,\ \overline{C}_3,\ \overline{C}_4,\ \overline{C}_5$ для множества $\{i_0,\ i_1,\ i_2\}=\{0,\ 1,\ 3\}$ и векторов $z_0=0$, $z_1=(\ 1100\ )$, $z_3=(\ 0101\ )$.

$$\begin{array}{cccc}
\overline{C}_1\ \overline{C}_2 & \overline{C}_3 & \overline{C}_4 & \overline{C}_5 \\[6pt]
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} &
\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} &
\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} &
\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}
\end{array}$$

Далее построим матрицу $\left(\overline{C}_1^T\ \overline{C}_2^T\ \overline{C}_3^T\ \overline{C}_4^T\ \overline{C}_5^T\right)$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix},$$

которая является проверочной матрицей для совершенного кода $[13,\ 9,\ A]$.

Рассмотрим канал $A\in A(0,1,3)$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0
\end{array}
$$

В конце работы рассмотрим групповые совершенные коды, построенные с помощью разбиения $C_n(1,s)$ при $p=\dfrac{2^n-1}{s}$ и исправляющие ошибки канала $A\in A(0,1,...,k)$ в пространстве $B^{\bar{n}}$, $\bar{n}=2^n-1-p$.

Пример 11. Рассмотрим разбиение $C_n(1,\ 2^n-1)=\{C_0,\ B^n\setminus C_0\}$, при $p=1$ и $\overline{C}_1=\left(B^n\setminus \mathrm{C}_0\right)\setminus\left(1\ 0^{n-1}\right)$. Возьмем случай n=4.

$$
\overline{C}_1^T=\begin{pmatrix}
0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\
1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1\\
0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1
\end{pmatrix}.
$$

$\overline{C}_1^T$ является проверочной матрицей группового совершенного кода $[14,\ 10,\ A]$, где $A=A(0,\ 1)$ имеет следующий вид:

$$A = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & & . & . & . & \\ . & & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{array}.$$

Рассмотрим более подробно групповой совершенный код $[n_k,\ n_k - n,\ A]$, где $n_k = 2^n - 1 - \frac{2^n - 1}{3}$, конечно, при условии, что $C_n(1,\ 3) = \{C_0,\ C_1, ..., C_k\}$ является разбиением пространства B^n. Тогда при $k = \frac{2^n - 1}{3}$ канал $A \in A(0,\ 1, ...,\ k)$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & . & & . & & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & & . & & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & & . & & . & 0 & 0 \\ & & & & . & & & & \\ & & & & . & & & & \\ & & & & . & & & & \\ 0 & 0 & . & & . & & . & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & & . & & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ & & & & . & & & & \\ & & & & . & & & & \\ & & & & . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 1 \end{array}.$$

Отсюда и из следствия 4 получаем: совершенный код $[n_k,\ n_k - n,\ A]$ при $n_k = 2^n - 1 - \frac{2^n - 1}{3}$, $k = \frac{2^n - 1}{3}$, $A = A(0,1,...,k)$ является квазисовершенным кодом в аддитивном канале $A = \{0^{n_k}, 0^i 1 0^{n_k - i - 1},\ i = 0, n_k - 1\}$.

Приложение.

Нулевые матрицы

В этом приложении мы рассмотрим связь между нулевыми множествами и тупиковыми тестами [7]. Для дальнейшего изучения удобно рассматривать множество векторов как матрицу, строками которых являются векторы данного множества.

Пусть $F_m{}^n$ – пространство $(m \times n)$– матриц над полем Галуа GF(2).

Определение. Матрица $C \in F_m{}^n$ называется нулевой, если сумма ее строк ровна нулевому вектору. При этом матрицу $C \in F_m{}^n$ будем называть правильной, если все ее строки различны. Ясно, что правильная матрица соответствует подмножеству мощности m из B^n.

Задача 1. Описать множество P_m правильных нулевых матриц.

Задача 2. Найти число правильных нулевых матриц.

Задача 3. Описать разбиение B^n с помощью «нулевых» подмножеств.

Примеры.

1) Если $m = 1$, то правильная нулевая матрица – это $C = \left(0^n\right)$.

2) Если $m = 2$, то правильных нулевых матриц не существует.

3) Если $m = 3$, то следующие матрицы правильные нулевые.

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \left(C_1 C_2\right)$, где C_2 – произвольная нулевая матрица из $F_3{}^n$.

4) При $m = 4$

$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \left(C_1 C_2\right)$, где C_2 – произвольная нулевая матрица из $F_4{}^n$.

5) Пусть $m = 5$. Тогда нулевые правильные матрицы следующие:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ и $C = (C_1 C_2)$, где C_2 – произвольная нулевая матрица из $F_5^{\ n}$.

Рассмотрим теперь следующее множество матриц $F_m^{\ *}$:

$$F_m^{\ *} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_m^{\ n} .$$

Введем на $F^*{}_m$ частичный порядок, положив

$$C_1 \leq C_2 ,$$

если матрица C_1 может быть получена из C_2 удалением некоторого множества столбцов.

Определение. Матрица C из класса P_m называется экстремальной (тупиковой), если из условий $C_2 \leq C$ следует, что $C_2 = C$.

Примеры.

6) Опишем все экстремальные матрицы из P_5 :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Две матрицы C_1 и C_2 из F_m^n называются эквивалентными, если C_1 может быть получена из C_2 перестановкой строк и столбцов (обозначим $C_1 \sim C_2$).

Примеры.

7) Матрицы C_2 и C_3 из примера 6 эквивалентны, так как C_3 получаем из C_2 перестановкой из 2-го и 3-го столбцов.

В связи с приведенным выше определением мы будем использовать следующее кодирование матриц из F_m^n. Перенумеруем все столбцы длины m, избрав, например, лексикографический порядок.

Пусть соответствующая нумерация будет $L_1, L_2, ..., L_{2^m}$. После этого каждой матрице $C \in F_m^n$ сопоставим вектор длины 2^m. $L(C) = (\gamma_1 \gamma_2 ... \gamma_{2^m})$, где γ_i – число столбцов равных L_i в матрице C.

Вектор $L(C)$ будем называть столбцовым вектором матрицы C. Имеет место следующий очевидный факт.

Утверждение. Если матрица C_1 и C_2 эквивалентны, то $L(C_1) = L(C_2)$.

Очевидная задача теперь состоит в описании всех экстремальных матриц, при заданном фиксированном числе m. Множество всех таких матриц мы обозначим через P_m^0. Элементы класса P_m^0 обладают следующими свойствами:

1) Если $C \in P_m^0$, то $2^n \geq m$.

Это свойство следует из того, что все строки матрицы C – различны.

2) Если $C \in P_m^0$, то при $L(C) = (\gamma_1 \gamma_2 ... \gamma_{2^m})$ имеем: $\gamma_i \leq 1,\ 1 \leq i \leq 2^m$.

Действительно, если $\gamma_i \geq 2$, то в матрице C есть одинаковые столбцы. Но тогда один из них можно удалить, и в полученной матрице строки опять будут разными, но это означает, что $C \notin P_m^0$.

3) Если $C \in P_m^0$, то в матрице C нет ни нулевых, ни единичных столбцов.

Обоснование этого пункта аналогично предыдущему.

4) Каждый из столбцов матрицы $C \in P_m^0$ содержит четное число единиц.

Это следует из того, что матрица C – нулевая.

Смысл введенных определений и приведенных выше свойств состоит в том, что любую матрицу из P_m можно получить, «добавляя» к матрице из P_m некоторую нулевую матрицу. Это следует из того, что, «выбрасывая» из произвольной матрицы $C \in P_m$ столбцы, мы придем к некоторой матрице $C_1 \in P_m^0$.

Заключение. Получение из матрицы $C \in P_m$ матриц из P_m^0 – это задача о построении тупиковых тестов для заданной матрицы C [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* Разбиения n-мерного пространства над GF(2) на области Дирихле. Вестник РАУ. Ер., 2011. СС. 26–41.

2. *Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* Оптимальные множества в n-мерном кубе. Ученые записки. ЕРГУ. Ер., 1989. Т. 170, № 1. СС. 18–26.

3. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* Совершенные коды в аддитивных каналах. Доклады РАН, 2006. Т. 411, № 3. СС. 306–309.

4. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* Коррекция ошибок в аддитивном канале. Вестник РАУ, 2010. Т. 2. СС. 12–25.

5. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* О совершенных кодах в аддитивном канале. «Проблемы передачи информации». Т. 44, вып. 4, 2008. СС. 12–19.

6. *Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А*. Теории кодов, исправляющих ошибки. М., «Связь», 1979.

7. *Соловьев Н.А.* Тесты (теория, построение, применение). Новосибирск: Наука, 1978.

PARTITION AND THE PERFECT CODES

G.L. Movsisyan

In the present work the partitions of the *n*-dimensional space into subsets with “zero” limitation are considered. Descriptions of some classes of both perfect and imperfect codes in the additive channel are presented too. A way of constructing of group codes correcting the errors in the additive channels is presented, and this method is a further generalization of Hamming’s method of code construction.

ՏՐՈՀՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԿԱՏԱՐՅԱԼ ԿՈԴԵՐ

Գ.Լ. Մովսիսյան

Աշխատանքում դիտարկվում են *n*-չափանի տարածության զրոյական սահմանափակումներով տրոհումը ենթաբազմություններով: Բերված են ադդիտիվ կապուղու համար կատարյալ և քվազի կատարյալ կոդերի դասերի նկարագրություններ: Հեմինգի մեթոդի ընդհանրացմամբ, ներկայացված են ադդիտիվ կապուղում սխալներ ուղղող գծային կոդերի կառուցման եղանակ:

УДК: 517.968.4 Поступила 13.01.2014г.

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА-НЕМЫЦКОГО НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ[1]

Х.А. Хачатрян, М.Ф. Броян

Институт Математики НАН Армении
e-mails: Khach82@rambler.ru, Broyan@rambler.ru

АННОТАЦИЯ

В настоящей заметке исследуется класс нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с некомпактным оператором Гаммерштейна-Немыцкого. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в самых различных областях современного естествознания. В частности, уравнениями такого типа описываются физические процессы в неоднородных средах. Кроме того, эти уравнения имеют применения в эконометрике, инженерии, биологии и т.д.

Сочетание специальных итерационных методов с методами теории построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора дает возможность доказать теорему глобальной разрешимости в пространстве $L_1(R)\cap L_\infty(R)$. Более того, в работе также предлагается специальный итерационный подход для построения этих решений. В конце работы приводятся конкретные частные примеры указанных уравнений для иллюстрации полученных результатов.

Ключевые слова: уравнение Гаммерштейна-Немыцкого, условие Каратеодори, сходимость итераций, монотонность.

§1. Введение

Нелинейными интегральными уравнениями вида

$$\varphi(x)=\mu_0(x,\varphi(x))+\int_R K(x,t)\mu_1(t,\varphi(t))dt,\ x\in R\equiv(-\infty,+\infty) \qquad (1)$$

описываются ряд физических процессов в неоднородных средах. В частности, уравнение (1) имеет непосредственное применение в теории переноса излучения

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 13YR-1A0003

в случае неоднородной среды в спектральных линиях (см. [1]-[3]). Кроме того, различные частные случаи уравнения (1) имеют применение в эконометрике, инженерии, биологии и т.д.

В уравнении (1) функции $\{\mu_j(x,u)\}_{j=0,1}$, описывающие нелинейность, являются вещественными отображениями, удовлетворяющими условию критичности:

$$\mu_j(x,0)\equiv 0,\ \forall x\in R,\quad j=0,1. \tag{2}$$

Ядро $K(x,t)-$ определенная на множестве $R\times R$ неотрицательная и измеримая функция, удовлетворяющая следующему условию:
существуют измеримые на R функции $\lambda(x)$ и $\overset{\circ}{K}(x)$, причем

$$\frac{1}{m}\leq\lambda(x)\leq 1, m>1,\ x\in R,\ m\lambda-1\in L_1(R), \tag{3}$$

$$\overset{\circ}{K}(x)\geq 0,\ x\in R,\quad \overset{\circ}{K}\in L_1(R)\cap L_\infty(R),\ \int_R\overset{\circ}{K}(u)du=1, \tag{4}$$

такие что

$$0\leq K(x,t)\leq\lambda(x)\overset{\circ}{K}(x-t),\ \forall(x,t)\in R\times R. \tag{5}$$

В частном случае, когда

$$\mu_0\equiv 0,\quad \mu_1(t,u)\equiv u,\quad a\quad K(x,t)=\lambda(x)\overset{\circ}{K}(x-t),$$

уравнение (1) исследовалось в работе [3] при дополнительном ограничении на $\nu(\overset{\circ}{K})\equiv\int_R x\overset{\circ}{K}(x)dx\neq 0.$

В случае, когда функция $\mu_0(x,u)$ не зависит от u, а

$$\mu_1(t,u)=u,\ K(x,t)=\lambda(x)\overset{\circ}{K}(x-t),$$

вопросы глобальной разрешимости уравнения (1) обсуждены в работах [4]-[6].

Отметим, что соответствующие нелинейные уравнения на полуоси (т.е. когда интегрирование совершается в пределах от 0 до $+\infty$ и уравнение рассматривается на полуоси) рассмотрены в работах [7]-[8].

В настоящей работе сочетание специальных итерационных методов с методами теории построения инвариантных конусных отрезков, для соответствующего нелинейного оператора, дает возможность доказать теорему глобальной разрешимости в пространстве $L_1(R)\cap L_\infty(R)$. Более того, в работе также предлагается специальный итерационный подход для построения этих

решений. В конце работы приводятся примеры функций $\{\mu_j(x,z)\}_{j=0,1}$, для которых выполнены все условия основной теоремы.

§2. Вспомогательные факты

Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть $\eta > 0$, функция $Q(\tau)$– определенная на множестве R, удовлетворяет следующим условиям:

$a_1)$ $Q\uparrow$ *на* $[0,\eta]$,

$a_2)$ $Q(0)=0,\ Q(\eta)=\eta,$ *причем* $\eta-$*первый положительный корень уравнения* $Q(x)=x$,

$a_3)$ Q *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[0,\eta]$, *т.е. существует положительное число* L, *такое что при любых* $\tau_1,\tau_2\in[0,\eta]$ *выполняется неравенство:*

$$|Q(\tau_1)-Q(\tau_2)|\le L|\tau_1-\tau_2|.$$

Тогда для $\forall\alpha\in I\equiv\left(0,\min\left(1,\dfrac{1}{L}\right)\right)$ и $m>1$ *функция* $G_\alpha(\tau)=\eta-\alpha Q(\eta-\tau),\ \tau\in[0,\eta]$ *обладает следующими свойствами:*

$j_1)$ $G_\alpha\in C[0,\eta], G_\alpha\uparrow$ *на* $[0,\eta], \forall\alpha\in I\equiv\left(0,min\left(1,\dfrac{1}{L}\right)\right)$,

$j_2)$ $G_\alpha(0)>0,\ G_\alpha(\eta)=\eta, \forall\alpha\in I$,

$j_3)$ *существует положительное число* θ *(причем единственное),* $m\theta<\eta$, *такое что* $G_\alpha(\theta)=m\theta,\ \ m>1$,

$j_4)$ G_α *является сжатым отображением на отрезке* $[0,\eta]$.

Доказательство тривиально.

Теперь рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение типа Гаммерштейна:

$$f(t)=\lambda(t)\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)G_\alpha(f(s))ds,\ t\in R \tag{6}$$

относительно искомой измеримой функции $f(t)$.

В работе [9] доказано, что при выполнении условий (3)-(4) уравнение (6) имеет решение $f(x)$ со следующим свойствам: $\theta\le f(x)\le\eta$.

Ниже при некоторых ограничениях на функции λ убедимся в следующем дополнительном свойстве решения $f(x)$ уравнения (6).

Справедлива следующая основная

Лемма 2. *Пусть функция* Q *удовлетворяет условиям леммы 1,* $\alpha \in I$, $m > 1$, *а* λ *и* $\overset{o}{K}-$ *условиям (3)-(4). Тогда, если* $m\lambda - 1 \in L_1^0(R)$, *то ограниченное решение* $f(x)$ *уравнения (6) обладает следующим дополнительным свойством*:

$$f - \theta \in L_1^0(R) \equiv \left\{ \varphi \in L_1(R),\ \lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0 \right\},$$

где θ *по* α *и* m *определяется как в лемме 1.*

Доказательство. Рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное неоднородное интегральное уравнение:

$$\rho(t) = \theta(m\lambda(t) - 1) + \lambda(t)\int_R \overset{o}{K}(t-s)[G_\alpha(\rho(s)+\theta) - m\theta]ds,\ t \in R \qquad (7)$$

относительно измеримой функции $\rho(t)$. Введем следующие последовательные приближения для уравнения (7):

$$\rho_{n+1}(t) = \theta(m\lambda(t) - 1) + \lambda(t)\int_R \overset{o}{K}(t-s)[G_\alpha(\rho_n(s)+\theta) - m\theta]ds,$$
$$\rho_0(t) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad t \in R. \qquad (8)$$

Индукцией по n можно убедиться, что

$a)\ \rho_n(t) \uparrow$ по n, $t \in R$, (9)

$b)\ \rho_n \in L_1(R),\ n = 0,1,2,\ldots.$ (10)

$c)\ \rho_n(t) \le \eta - \theta,\quad n = 0,1,2,\ldots.$ (11)

$d)\ \int_R \rho_n(t)dt \le \dfrac{\theta\|m\lambda - 1\|_{L_1(R)}}{1-\beta},\ n = 0,1,2,\ldots,\ \beta = \alpha L < 1.$ (12)

Свойства $a)$ непосредственно следует из $j_1)$, а $b)-$ из свойства функций λ, $\overset{o}{K}$ и определения G_α.

Ниже докажем неравенства (11) и (12). Сначала убедимся в справедливости $c)$.

При $n = 0$ неравенство (11) очевидно. Предполагая, что (11) выполняется при некотором $n \in N$ и учитывая свойства функции $G_\alpha(\tau)$, из (8) получим:

$$\rho_{n+1}(t)\leq\theta(m\lambda(t)-1)+\lambda(t)\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)(\eta-m\theta)ds=\eta\lambda(t)-\theta\leq\eta-\theta.$$

Теперь убедимся в справедливости неравенств d). При $n=0$ неравенство (12) очевидно. Предполагая, что (12) выполняется при некотором $n\in N$, с учетом j_3), j_4) и (10) из (8) будем иметь:

$$\int_R\rho_{n+1}(t)dt\leq\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}+\int_R\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)[G_\alpha(\rho_n(s)+\theta)-m\theta]dsdt\leq$$

$$\leq\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}+\beta\int_R\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)\rho_n(s)dsdt\leq$$

$$\leq\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}+\frac{\beta}{1-\beta}\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}=\frac{\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}}{1-\beta}.$$

Следовательно, из предельной теоремы Б. Леви следует, что последовательность функций $\{\rho_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n(t)=\rho(t)\in L_1(R)$ и $\rho(t)$ удовлетворяет уравнению (7), причем из (11), (12) следует, что

$$\rho(t)\geq 0,\ \rho(t)\leq\eta-\theta, t\in R,\ \int_R\rho(t)dt\leq\frac{\theta\|m\lambda-1\|_{L_1(R)}}{1-\beta}. \tag{13}$$

Из (13) и (11) следует, что $\rho\in L_1(R)\cap\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\equiv\{\varphi\in L_\infty(R);0\leq\varphi(x)\leq\eta-\theta,x\in R\}$. Докажем единственность решения уравнения (7) в классе функций $\mathfrak{M}$.

Предположим обратное: пусть $\rho(t),\rho^*(t)\in\mathfrak{M}$ являются решениями уравнения (7). Тогда, с учетом j_4) из (7), будем иметь:

$$|\rho(t)-\rho^*(t)|=|\lambda(t)\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)[G_\alpha(\rho(s)+\theta)-G_\alpha(\rho^*(s)+\theta)]ds|\leq$$

$$\leq\lambda(t)\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)|G_\alpha(\rho(s)+\theta)-G_\alpha(\rho^*(s)+\theta)|ds\leq$$

$$\leq\beta\lambda(t)\int_R \overset{\circ}{K}(t-s)|\rho(s)-\rho^*(s)|ds\leq\beta\sup_{s\geq 0}|\rho(s)-\rho^*(s)|.$$

Откуда следует, что $\sup\limits_{s\geq 0}|\rho(s)-\rho^*(s)|=0$, ибо $\beta<1$, следовательно $\rho(s)=\rho^*(s)$ почти всюду на R. С другой стороны, простой подстановкой

можно убедиться, что функция $\rho(t) \equiv f(t) - \theta \in \mathfrak{M}$ является решением уравнения (7).

Таким образом, единственное решение уравнения (7) $\rho(t) = f(t) - \theta \in L_1(R) \cap \mathfrak{M}$.

С учетом леммы 1 из (7) имеем

$$0 \le f(t) - \theta \le \theta(m\lambda(t) - 1) + \beta \int_R \overset{\circ}{K}(t-s)(f(s) - \theta)ds. \tag{14}$$

Так как $m\lambda - 1 \in L_1^0(R), \overset{\circ}{K} \in L_1(R), f - \theta \in L_1(R),$ то учитывая известное свойство свертки (см. [10]), получим, что $f - \theta \in L_1^0(R) \cap \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

§3. Основной результат

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть для функций* K, $\overset{\circ}{K}$ *и* λ *выполняются условия (3)-(5), причем функция* λ *обладает свойством:* $m\lambda - 1 \in L_1^0(R)$, *а функции* $\mu_j(x,z)$, $(j = 0,1)$, *определенные на множестве* $R \times R$, *удовлетворяют следующим условиям*:

$i_1)$ *существует положительное число* $\varepsilon \in (0,\theta]$, *такое что* $\mu_j(x,z)\uparrow$ *по* z *на отрезке* $[v_\varepsilon(x), \eta - \theta]$ *при каждом фиксированном* $x \in R$, $(j = 0,1)$,

$i_2)$ *функции* $\mu_j(x,z)(j = 0,1)$ *удовлетворяют условию Каратеодори на множестве* $R \times [0, \eta - \theta]$ *по аргументу* z, *т.е. при каждом фиксированном* $z \in [0, \eta - \theta]$ *функции* $\mu_j(x,z)(j = 0,1)$ *измеримы по* $x \in R$, *и при почти всех* $x \in R$ *эти функции непрерывны по* z *на отрезке* $[0, \eta - \theta]$,

$i_3)$ *существует число* $\alpha \in I$, *такое что*

$$0 \le \mu_1(x,z) \le G_\alpha(z + \theta) - m\theta, \; x \in R, \;\; z \in [v_\varepsilon(x), \eta - \theta],$$

$i_4)$ *выполняются неравенства*

$$\mu_0(x, v_\varepsilon(x)) \ge v_\varepsilon(x),$$

$$\mu_0(x, \eta - \theta) \le v_\theta(x), \; x \in R,$$

где $v_\delta(x) \equiv \delta(m\lambda(x) - 1)$, $\delta > 0$, $x \in R$.

Тогда уравнение (1) имеет неотрицательное ненулевое решение в пространстве $L_1^0(R) \cap L_\infty(R)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие специальные последовательные приближения:

$$\varphi_{n+1}(x)=\mu_0(x,\varphi_n(x))+\int_R K(x,t)\mu_1(t,\varphi_n(t))dt,\ \varphi_0(x)=v_\varepsilon(x),\ n=0,1,2,\ldots \quad (15)$$

Индукцией по n ниже убедимся, что

$$\varphi_n(x)\uparrow \text{по}\, n,\ x\in R,\quad n=0,1,2,\ldots \quad (16)$$

$$\varphi_n(x)\le f(x)-\theta,\ n=0,1,2,\ldots,\quad x\in R. \quad (17)$$

Сперва докажем (16).

Неравенство $\varphi_1(x)\ge\varphi_0(x)$ непосредственно следует из (15), с учетом монотонности функций $\mu_j(x,z)(j=0,1)$ и неотрицательности λ и K:

$$\varphi_1(x)\ge\mu_0(x,\varphi_0(x))=\mu_0(x,v_\varepsilon(x))\ge v_\varepsilon(x)=\varphi_0(x).$$

Предполагая, что $\varphi_n(x)\ge\varphi_{n-1}(x)$ при некотором $n\in N,$ из (15) получим

$$\varphi_{n+1}(x)\ge\mu_0(x,\varphi_{n-1}(x))+\int_R K(x,t)\mu_1(t,\varphi_{n-1}(t))dt=\varphi_n(x).$$

Теперь докажем (17). В случае $n=0$ имеем:

$$\varphi_0(x)=\varepsilon(m\lambda(x)-1)\le f(x)-\theta$$

в силу леммы 2.

Пусть $\varphi_n(x)\le f(x)-\theta$ при некотором $n\in N$.

Тогда в силу (15), $j_3)$ и $j_4)$ имеем

$$\varphi_{n+1}(x)\le\mu_0(x,\eta-\theta)+\int_R K(x,t)[G_\alpha(f(t))-m\theta]dt\le$$

$$\le v_\theta(x)+\lambda(x)\int_R \overset{\circ}{K}(x-t)[G_\alpha(f(t))-m\theta]dt=$$

$$=v_\theta(x)+f(x)-m\theta\lambda(x)=\theta(m\lambda(x)-1)+f(x)-m\theta\lambda(x)=f(x)-\theta.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),$ причем

$$v_\varepsilon(x)\le\varphi(x)\le f(x)-\theta,\ x\in R$$

$$\varepsilon(m\lambda(x)-1)\le\varphi(x)\le f(x)-\theta.$$

Следовательно, $\varphi(x) \in L_1^0(R) \cap L_\infty(R)$.

Использование условия i_2) и применение теоремы Б. Леви приводит к завершению доказательства.

В конце работы приведем несколько примеров функций $\mu_j(t,z), (j=0,1)$.

Примеры функций $\mu_j(t,z)$ для основной теоремы:

• $\mu_0(x,z) = v_{\varepsilon_1+\varepsilon_0}(x)\dfrac{z}{z+v_{\varepsilon_0}(t)}, \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0, \eta - \theta \geq \varepsilon + \varepsilon_0, \; t \in R, z \in (0,\theta],$

• $\mu_0(x,z) = v_{\varepsilon_1+\varepsilon_0}(x)\dfrac{\beta z^2}{(z+v_{\varepsilon_0}(t))^2}, \; \beta \geq 1 + \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}, \theta \geq \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_0), \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0, \; \varepsilon \in (0,\theta],$

• $\mu_1(t,z) = \omega(t)\sin[\dfrac{\pi}{2(\eta-\theta)}(G_\alpha(z+\theta) - 2\theta)], \; \omega \in C(R), \; 0 \leq \omega(t) \leq \dfrac{2(\eta-\theta)}{\pi}, \; t \in R,$

• $\mu_1(x,z) = q(x)\dfrac{(G_\alpha(z+\theta) - m\theta)^p}{(\eta-\theta)^{p-1}}, \quad где \quad 0 \leq q(x) \leq 1, \; q \in C(R).$

Замечание 1. Заметим, что во всех приведенных примерах функции $\mu_j(t,z)$ обладают свойством:

$$\mu_j(t,0) \equiv 0, \; \forall t \in R, j = 0,1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян В.А.* Научные труды. Ер.: Изд-во АН. Арм. ССР, 1960. Т. 1. 431 с.

2. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения. Астрофизика. Т. 2. № 4, 1966. СС. 31–36.

3. *Арабаджян Л.Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде. Дифференциальные уравнения. Т. 23. № 9, 1987. СС. 1618–1622.

4. *Енгибарян Н.Б.* Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой. Мат. сб. Т. 193. № 6, 2002. СС. 61–82.

5. *Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ, 1984. Т. 22. СС. 175–242.

6. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: «Наука», 1978. 295с.

7. *Хачатрян Х.А.* О некоторых классах нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами. Вестник Сам. Гос. Тех. унив. сер. физ.-мат. наук, 2013. Т. 30. № 1. СС. 181–188.

8. *Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A.* Hammerstein-Nemitskii type nonlinear integral equations on half line in space $L_1(0,+\infty)\cap L_\infty(0,+\infty)$. Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rer. Nat. Mathematica, 2013. Vol. 52, № 1. PP. 89–100.

9. *Хачатрян Х.А.* О положительных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна-Немыцкого на всей оси. Труды Московского Мат. общества, 2014. Т. 75, № 1. СС. 3–17.

10. *Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки. Мат. сб., 2007. Т. 198, № 7. СС. 45–62.

ON THE GLOBAL SOLVABILITY OF A CLASS HAMMERSTEIN-NEMITSKII TYPE NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ON WHOLE LINE

Kh.A. Khachatryan, M.F. Broyan

SUMMARY

In present note a class of nonlinear integral equations with Hammerstein-Nemitskii type noncompact operator in whole line is studied. Mentioned class of equations have direct application in various fields of natural sciences.

In particular, by means of such type equations are described physical processes in nonhomogeneous media. Besides, these equations have applications in econometrics, engineering, biology and etc.

Combining special iteration methods with the methods of construction of invariant cone intervals for corresponding nonlinear operator allow us to prove the theorem on global solvability in space $L_1(R)\cap L_\infty(R)$.

Moreover, in the work special iteration approach for construction of these solutions are also suggested. For illustration of obtained results at the end of the work concrete examples of these equations are given.

Keywords: Hammerstein-Nemitskii equation, Caratheodory equation, convergence of iteration, monotonicity.

ԱՄԲՈՂՋ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՀԱՄԵՐՇՏԵՅՆ-ՆԵՄԻՑԿԻԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԳԼՈԲԱԼ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Խ.Ա. Խաչատրյան, Մ.Ֆ. Բրոյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում հետազոտվում է ամբողջ առանցքի վրա Համերշտեյն-Նեմիցկիի ոչ կոմպակտ օպերատորներով ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների դաս:
Նշված հավասարումների դասն ունի անմիջական կիրառություն ժամանակակից բնագիտության տարբեր բնագավառներում: Մասնավորապես, այդպիսի հավասարումներով նկարագրվում են անհամասեռ միջավայրերում ֆիզիկական պրոցեսներ: Բացի այդ, դիտարկվող հավասարումներն ունեն կիրառություններ էկոնոմետրիկայում, ինժեներիայում, կենսաբանությունում և այլն:
Հատուկ իտերացիոն մեթոդների զուգակցումը համապատասխան ոչ գծային օպերատորի համար ինվարիանտ կոնային հատվածների կառուցման տեսության մեթոդների հետ, հնարավորություն է տալիս ապացուցել գլոբալ լուծելիության թեորեմ՝ $L_1(R)\cap L_\infty(R)$ տարածությունում: Ավելին, աշխատանքում առաջարկվում է նաև այդպիսի լուծումների կառուցման հատուկ իտերացիոն մոտեցում: Աշխատանքի վերջում բերվում են նշված հավասարումների կոնկրետ մասնավոր օրինակներ ստացված արդյունքների լուսաբանման համար:

Հիմնաբառեր՝ Համերշտեյն-Նեմիցկիի հավասարում, Կարաթեոդորիի պայման, իտերացիայի զուգամիտություն, մոնոտոնություն:

БИОЛОГИЯ

УДК 577.164.39+352.38 Поступила 15.11.2013г.

СОДЕРЖАНИЕ ФЛАВОНОИДОВ И АНТИОКСИДАНТНАЯ АКТИВНОСТЬ ЭКСТРАКТОВ *H. PERFORATUM, P. MAJOR L., A. ABSINTHIUM* И *C. LAEVIGATA*

Д. Оганесян

Российско-Армянский (Славянский) университет
raubioinf@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В последние годы антиоксиданты, как природные, так и синтетические, все шире входят в клиническую практику. Высокая медико-биологическая активность растительных экстрактов во многом обусловлена наличием флавоноидов. Однако антиоксидантная активность не всегда коррелирует с содержанием флавоноидов в растительном материале.

В настоящей работе была исследована антиоксидантная активность и определено общее количество флавоноидных компонентов в этанольных экстрактах растений *Hypericum perforatum, Plantago major L., Artemisia absinthium, Crataegus laevigata*.

Ключевые слова: антиоксиданты, флавоноиды, антиоксидантная активность.

Введение

В последнее время все большее внимание уделяется профилактике и лечению различных заболеваний препаратами растительного происхождения, поскольку человеческий организм легче, как правило, усваивает биологические вещества, содержащиеся в растениях, нежели в синтетических медикаментах, поэтому лекарства, полученные из растений, с каждым годом приобретают все большую популярность. Антиоксиданты растительного происхождения широко используют в медицине и пищевой промышленности в виде экстрактов и натуральных масел. Особое внимание в настоящее время уделяется флавоноидам – большой группе соединений с полифенольной структурой, обладающим антиоксидантным [2], противовоспалительным [1], ангиопротекторным действием [3].

Целью настоящей работы являлось исследование корреляции между антиоксидантной активностью и общим количеством флавоноидных компонентов в этанольных экстрактов растений *Hypericum perforatum, Plantago major L., Artemisia absinthium, Crataegus laevigata.*

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Объектам исследования являлись растения: подорожник большой (*Plantago major L.*), полынь горькая (*Artemisia absinthium*), боярышник обыкновенный (*Crataegus laevigata*) все из Котайкского региона РА и зверобой продырявленный (*Hypericum perforatum*) из Тавушского региона РА.

Приготовление экстрактов

Листья подорожника и полыни, листья и цветки боярышника и зверобоя были высушены и измельчены до получения однородного порошка.

Для приготовления спиртовых экстрактов на полученные порошки добавляли 96% этанол в соотношении 1:10, и смеси инкубировали на магнитной мешалке при комнатной температуре в течение 24-х часов. Для очистки экстрактов от твердых компонентов после инкубации экстракты центрифугировали на микроцентрифуге (Eppendorf 5415) при 13 000 об/мин в течение 10 минут, осадок удаляли.

Определение общего количества флавоноидов

Общее количество флавоноидов в экстрактах определялось при помощи колориметрического метода, основанного на способности флавоноидов и флавоновых гликозидов образовывать с Al^{3+} хелатные комплексы желтого цвета [5]. Спиртовые экстракты (0,01 г/мл) в объеме 0.5 мл смешивали с 1.5 мл этанола, 0.1 мл 10%-ого хлорида алюминия, 0.1 мл 1М-ого ацетата натрия и 2.8 мл дистиллированной воды. Образцы инкубировали при комнатной температуре в течение 30 минут, после чего определяли оптическую плотность образцов в 1 см кювете при длине волны 430 нм на спектрофотометре UV/Vis (JENWAY 6405).

Определение антирадикальной активности

Антирадикальную активность исследуемых экстрактов измеряли колориметрическим методом с использованием ДФПГ (2,2-дифенил-1-пикрилгидрозил) (Флюка) [4].

Для измерения антирадикальной активности компонентов экстрактов использовали 100μМ раствор ДФПГ. Спиртовые экстракты разбавляли в соотношении от 6.25 мг/мл до 25 мг/мл. Полученные образцы в объеме 40 мкл смешивали с 360 мкл раствора ДФПГ и инкубировали в течение 15 мин при температуре 30°С, а оптическую плотность измеряли на UV/Vis (JENWAY 6405) при длине волны 517 нм. В качестве позитивного контроля использовали спиртовый раствор кверцетина. Остаточное поглощение растворов при полном восстанов-

лении ДФПГ составляло в среднем 14.5%. Процент антиоксидантной активности (АОА) рассчитывался по формуле 1, с учетом величины остаточного поглощения (фактор коррекции – ФК):

$$АОА\% = [(ОП_{контроль} – ОП_{образец}) / (ОП_{контроль} – ФК)] \times 100, \qquad (2)$$

где ФК = остаточное поглощение / ($ОП_{контроль}$ – остаточное поглощение).

Значение IC_{50} показывает концентрацию компонентов в образце, необходимую для обесцвечивания раствора ДФПГ на 50%.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из исследуемых этанольных экстрактов, стандартизованых по сухой массе, наивысшая антирадикальная активность была выявлена у экстракта *C. Laevigata* (IC_{50}= 0.3125 мг/мл), а наименьшая активность – у экстракта *P. Major* (IC_{50}= 1.125мг/мл). Радикал-ингибирующая активность экстрактов *A. Absinthium и H. Perforatum* равнялась, соответственно, IC_{50}= 0.875 и IC_{50}= 0.625 мг/мл (рис. 1А).

Примечательно то, что самую высокую антирадикальную активность, стандартизованную по количеству флавоноидов, имеет *A. Absinthium* (IC_{50}= 16 мкг), а наименьшую активность, как и при стандартизации по сухой массе, проявляет экстракт *P. Major* (IC_{50}=40 мкг) (рис. 1Б).

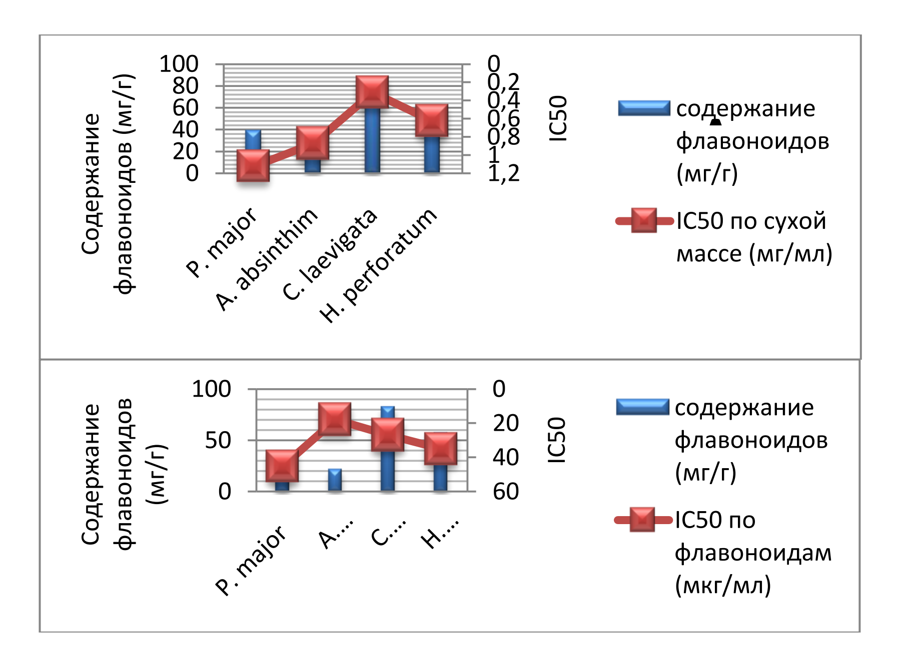


Рис. 1. Антирадикальная активность этанольных экстрактов.

Общее количество флавоноидов и антирадикальная активность экстрактов представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Общее количество флавоноидов, IC_{50} по сухой массе и по флавоноидам в экстрактах *Plantago major, Artemisia absinthium, Hypericum perforatum, Crataegus laevigata.*

Образцы	**Флавоноиды** (мг/г)	**IC_{50} по сухой массе** (мг/мл)	**IC_{50} по флавоноидам** (мкг/мл)
P. major	39	1.125	45
A. absinthium	21	0.875	18
C. laevigata	82	0.313	25
H. perforatum	57	0.625	35
Кверцетин	-	-	10

Полученные данные свидетельствуют корреляции между количеством флавоноидов и антирадикальной активностью в экстрактах *C. Laevigata, H. perforatum*, чего не наблюдается для экстрактов *P. major, A. absinthium*. Из этого можно сделать вывод, что биологически активные соединения *C. Laevigata, H. perforatum,* имеющие антирадикальную (антиоксидантную) активность, принадлежат флавоноидному ряду вторичных метаболитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jung J.H., Kang J.I., Kim H.S.* Effect of quercetin on impaired immune function in mice exposed to irradiation. Nutr Res Pract. 2012; 6(4):301–307.

2. *McAnlis G.T., McEneny J., Pearce J., Young I.S.* Absorption and antioxidant effects of quercetin from onions, in man. Eur J ClinNutr. 1999; 53: 92-96.

3. *Atalik K.E., Keleş B., Uyar Y., Dündar M.A., Oz M., Esen H.H., Indian J.* Vasoprotection by melatonin and quercetin in rats treated with cisplatin. Exp Biol. 2010; 48(12):1188–93.

4. *Mensor L.L., Menezes F.S., Leitao G.G., Reis A.S., Santos T.C., Coube C.S., Leitao S.G.* Screening of Brazilian Plant Extracts for Antioxidant Activity by the use of DPPH Free Radical Method, Phytother Res. 2001; 15: 127–130

5. *Chang C., Yang M., Wen H., Chern J.* Estimation of total flavonoid content in propolis by two complementary colorimetric methods. Food Drug Analaysis 2002; 10: 178–182.

ՖԼԱՎՈՆՈԻԴՆԵՐԻ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՀԱԿԱՕՔՍԻԴԻՉ ԱԿՏԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ *H. PERFORATUM*-Ի, *P. MAJOR L.* -Ի, *A. ABSINTHIUM*-Ի, *C. LAEVIGATA*-Ի ԷՔՍՏՐԱԿՏՆԵՐՈՒՄ

Դ. Հովհաննիսյան

Հայ-ռուսական (Սլավոնական) համալսարան
raubioinf@gmail.com

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Վերջին տարիներին, հակաօքսիդիչները, ինչպես բնական, այնպես էլ սինթետիկ, ավելի լայն են ընդգրկվում կլինիկական պրակտիկայում: Բարձր բժշկա-կենսաբանական ակտիվությունը մեծ մասամբ պայմանավորված է ֆլավոնոիդների պարունակությամբ: Սակայն հակաօքսիդիչ ակտիվությունը միշտ չէ, որ առնչություն է ունենում ֆլավոնոիդների պարունակության հետ բուսական նյութում:

Տվյալ աշխատանքում հետազոտվել է հակաօքսիդիչ ակտիվությունը և ֆլավոնոիդային բաղադրիչների ընդհանուր պարունակությունը *Hypericum perforatum, Plantago major L., Artemisia absinthium, Crataegus laevigata* բույսերի էթանոլային էքստրակտներում:

Հիմնաբառեր՝ հակաօքսիդիչները, ֆլավոնոիդներ, հակաօքսիդիչ ակտիվություն:

THE FLAVONOID CONTENT AND ANTIOXIDANT ACTIVITY OF THE *H. PERFORATUM, P. MAJOR L., A. ABSINTHIUM, C. LAEVIGATA* EXTRACTS

D. Hovhannisyan

Russian-Armenian (Slavonic) University
raubioinf@gmail.com

SUMMARY

In recent years antioxidants are increasingly being adopted into clinical practice. High biomedical activity of plant extracts is largely due to the presence of flavonoids. However, the antioxidant activity does not always correlate with the flavonoids in the plant material.

In this study we investigated the antioxidant activity and total number of flavonoid components in the ethanol plant extracts of *Hypericum perforatum, Plantago major L., Artemisia absinthium, Crataegus laevigata.*

Keywords: antioxidants, flavonoids, antioxidant activity.

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕДИЦИНЕ, В ЭКСПЕРТНО-КРИМИНАЛИСТИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ И В ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА

Н.К. Хачатрян

Национальное бюро экспертиз НАН РА

Во второй половине 80-х годов XX века в практику судебно-медицинской экспертизы вещественных доказательств начали внедряться методы молекулярной генетики, позволяющие проводить идентификационные исследования объектов биологического происхождения. В конце прошлого столетия ученые генетики открыли ДНК-дактилоскопический метод, который по праву был назван «золотым стандартом» судебной медицины и позволил криминалистам всей планеты более успешно бороться с преступностью и разрешать идентификационные вопросы, связанные с определением отцовства, материнства и родственных связей. Таким образом установилась постоянная связь между криминалистикой и генетикой. А в начале XXI века начались целенаправленные исследования генома человека, которые позволят в будущем создать «карту генов» подобно реальной географической карте мира. Как известно, именно из-за наследственных особенностей бывают ситуации, когда при одной и той же патологии одному лекарство помогает, а другому – нет. В скором будущем ученые планируют, влияя на гены, создать методы диагностики и лечения, индивидуальные для каждого человека, а также получить ключ к лечению наследственных болезней. Ученые признают, что до появления результатов, которые смогут ощутить на себе пациенты, еще далеко. Однако, в итоге, все передовые методы медицины будут опираться на карту генома [2].

Исследования генома дают весьма широкие возможности выявления состояния здоровья человеческого организма и создания принципиально новых лекарственных препаратов и новых методов лечения в каждом отдельном случае, а также возможность изучения тех изменений, которые могут привести к ухудшению качества генома человека. В лабораториях Европы проводятся исследования генома человека и изучение генетически детерминированных заболеваний сетчатки, ведущих к полной потере зрения из-за гибели нервных клеток сетчатки. Ученые Европы ищут способы восстановления погибших нервных клеток, и при успешном применении этих экспериментов на людях будет опровергнут миф о том, что нервные клетки не восстанавливаются. Благодаря гене-

тическим исследованиям европейских ученых считалось, что якобы большая часть спирали ДНК не несет никакой функции, и только 2% генома отвечают за производство белков. То есть большая часть ДНК до сих пор считалась «мусорной» – ее предназначение ученые понимали слабо и предполагали, что никаких специальных функций эти участки ДНК не несут. Однако из недавних исследований тех же европейских ученых становится ясно, что биологически активна намного большая часть генома, чем считалось ранее. Таким образом, опровергнут еще один миф и одновременно открыты широкие возможности для новых генетических исследований и для изучения новых, ранее не изученных участков человеческого генома.

Исследование учеными Шотландии тех изменений, которые происходят с генами, привели их к мысли, что именно изменение ДНК могло привести к эволюции и возникновению человека, а точнее из-за ошибки в ДНК древних беспозвоночных животных, которое произошло 500 миллионов лет назад. По мнению ученых, во время Кембрийского периода в генетическом процессе беспозвоночных произошел необъяснимый сбой, который и привел к эволюции, с одной стороны, и к развитию ряда заболеваний – с другой. Именно из-за подобных изменений произошло возникновение таких серьезных заболеваний, как рак, диабет и неврологические расстройства. Этим и объясняется распространенность этих заболеваний у людей. Учеными же открыты так называемые гены «переключатели» генов – это участки ДНК, включающие или отключающие в клетках те или иные гены, в результате чего также могут возникнуть условия для развития тех или иных патологий. «Переключатели» часто расположены далеко от гена, который они контролируют. Изучение этих взаимодействий генов в конечном итоге может открыть большие возможности для разработки новых методов лечения, таких болезней, как рак, диабет и т.д. Открывается целый новый мир для исследований, результаты которых используются в различных областях человеческой деятельности. Гены, как известно, представляют собой небольшие участки молекулы ДНК, содержащие инструкции, то есть определенную информацию для клеток организма о том, какие белковые химические соединения они должны синтезировать. Эти функции гена учитываются и изучаются учеными с разнообразных аспектов. Исследования ученых в области генетики используются для разработки лекарственных средств против старения и для продления человеческой жизни.

В фармакологии, в результате соответствующих генетических исследований, разрабатываются новые лекарственные средства от старения. 6–10 апреля 2014 года в Сочи состоится событие, способное изменить жизнь каждого человека – международная конференция «Генетика старения и долголетия» [2].

На конференции соберутся ведущие мировые эксперты в области продления жизни. Эти ученые уже внесли потрясающий вклад в изучение старения, в потенциальную возможность сохранения и улучшения качества жизни всех ныне живущих людей. Препараты для борьбы со старением станут доступны в те-

чение пяти лет. Об этом заявили сотрудники университета Нового Южного Уэльса в Сиднее.

Исследование ученых показало, что «благодаря ресвератролу – соединению, содержащемуся в кожуре винограда и красном вине, можно создавать лекарства, продлевающие жизнь и предотвращающие развитие возрастных заболеваний», – пишет Medical Xpress. По словам ученых, ресвератрол активирует белок SIRT-1 из числа ферментов-сиртуинов. Эти ферменты регулируют работу генов, связанных с реакцией живых клеток на стрессы и продолжительностью жизни. «В истории фармацевтики еще никогда не было лекарства, которое так ускоряло бы действие белка, как это делает ресверватрол с SIRT-1. Почти все остальные препараты либо замедляют это действие, либо вообще блокируют его», – говорит Д. Синклер. Профессор Майк Страттон, возглавляющий Институт Сангера при фонде Wellcome Trust, назвал результаты Encode «краеугольным камнем биологии человека на многие годы» [3]. «Проект «Encode» изменит методы работы многих исследователей и даст тем, кто стремится изучить происхождение болезней, гораздо лучшее понимание того, как именно генетические изменения ухудшают качество нашего генома», – заявил он.

Новые генетические методы лечения инфаркта миокарда предложили американские ученые. С помощью комбинации из 5-ти разных генов они смогли заставить нефункционирующие клетки подвергшейся некрозу в результате инфаркта миокарда сердечной мышцы практически полностью восстановиться до прежнего, здорового уровня. Они снова начали пульсировать вместе с сердцем, что позволяет говорить о возможности лечения инфаркта кардинально новым способом. Ученые сообщали об успешной инъекции трех генов GMT в сердца живых мышей, что позволило превратить фибробласты в пульсирующие клетки сердца. Попытки повторить опыт с клетками человеческого сердца изначально провалились, но добавление в коктейль 2-х новых генов позволило достичь тех же результатов, что и с мышами. Таким образом, в течение последующих 10 лет методы терапии инфаркта миокарда будут изменены [2]. А каким образом, например, используются на практике результаты молекулярно-генетических исследований в здравоохранении и в других областях медицины? Что анализируется при молекулярно-генетическом исследовании? Геном человека состоит из 3-х миллиардов нуклеотидов (букв). В результате международного проекта «Геном человека» были расшифрованы все последовательности ДНК человека и обнаружено около 22 тысяч генов. В настоящее время известна функция примерно 20 тысяч генов. Набор генов конкретного человека определяет его внешность, пол, наследственные заболевания (такие как муковисцидоз, гемофилия, фенилкетонурия и другие).

Именно набор генов конкретного человека предрасполагает (при воздействии соответствующих внешних факторов, таких как воспитание, питание, вредные привычки, образ жизни) к определенным чертам характера, способностям в различных сферах деятельности, к различным заболеваниям, вредным привычкам и т.д. Таким образом, анализируя вариации генов, функции которых

известны, можно определить склонность человека к вредным привычкам или предрасположенность к различным заболеваниям, рекомендовать диету, предупредить некоторые заболевания, также можно определить вид деятельности, где больше вероятность достижения успеха. Замена всего лишь одной буквы в последовательности гена (это называется SNP-single nucleotide polymorphism) может влиять на выносливость организма, а также повышать риск различных заболеваний, например, сердечно-сосудистых, аллергий и множества других. На исследование таких SNP и направлен молекулярно-генетический анализ, результаты которого используются в настоящее время и в медицинской генетике, в спортивной, и, наконец, в судебно-медицинской генетике, как для определения отцовства, материнства и родственных связей, так и для решения ряда идентификационных задач, стоящих перед судебно-медицинскими экспертами [3].

Молекулярно генетический анализ

Этап 1: Забор крови или слюны. Обычно для анализа берут кровь из вены. В некоторых генетических центрах могут взять буккальный эпителий (соскоб с внутренней стороны щеки) или слюну. Какой материал был взят для исследования значения не имеет, так как генетическая информация идентична в каждой клетке нашего организма.

Этап 2: Анализ ДНК на различные SNP. Из полученного материала выделяют ДНК.

Этап 3: Далее выделенную ДНК исследуют на наличие различных SNP /единичные нуклеотидные изменения/ методом полимеразной цепной реакции. В основе этого метода лежит многократное увеличение копий исследуемого участка ДНК с последующим применением различных методик для визуализации варианта SNP.

Этап 4: Интерпретация результата. Суммируя данные анкеты, результаты генетического, лабораторного и функционального исследований, врач генетик составляет генетический паспорт исследуемого, который содержит информацию об обнаруженных SNP и развернутый ответ о склонностях его к различным патологиям, рисках некоторых заболеваний, рекомендации по диете и приему фармакологических препаратов.

Этап 5: Заключительная беседа с врачом генетиком. Врач генетик в ходе беседы поясняет результаты молекулярно генетического исследования и дает соответствующие рекомендации. А как используют молекулярно генетический анализ в судебно-медицинской экспертизе вещественных доказательств биологической природы, то есть методы ДНК-анализа в практической деятельности судебных медиков и криминалистов? В современном мире преступления все чаще носят характер хорошо организованных и спланированных, иногда с применением новых технологий и достижений науки. Это диктует необходимость усиления борьбы с преступностью, заставляет применять все доступные средства и методы для их раскрытия и расследования, стимулирует поиск новых криминалистических методов и средств как для раскрытия наиболее опасных преступлений, так и для сбора и исследования источников доказательств, имеющих

существенное значение для успешного расследования и судебного рассмотрения уголовных дел. В этом смысле использование методов молекулярной генетики в современной криминалистической практике является ярким подтверждением успешного сотрудничества генетиков и криминалистов. Чаще всего это используется в процессе судебно-медицинской экспертизы вещественных доказательств биологической природы, то есть в биологических лабораториях при серологических идентификационных исследованиях и в судебно-генетических лабораториях. Это основные стержни в исследованиях вещественных доказательств. Вот почему судебно-медицинские эксперты, а также судебные серологи, цитологи, генетики и лаборанты делают все возможное, чтобы быть успешным исследовательским звеном в расследовании уголовных дел [4]. А на это могут повлиять очень разные факторы, объективные и субъективные, начиная от степени квалификации экспертов и кончая возможностями лабораторий, что определяется наличием необходимой материально-технической базы, степенью развития и применения на практике новых биотехнологий и достижений современной молекулярной биологии в этой области.

Техника геномной идентификации по ДНК была определена в 1987 году в судебно-медицинской практике Великобритании, как метод судебно-медицинской экспертизы или техника геномной идентификации по ДНК, «геномная идентификация», «ДНК-дактилоскопия», «генотипоскопия», ДНК профилирование. Универсальность и высокая индивидуальность результатов делают этот метод наиболее перспективным среди всех остальных методов идентификации человека в случаях непосредственного исследования объектов биологического происхождения [3]. Существует несколько вариантов технологии проведения исследований молекулы ДНК в целях идентификации человека. Один из вариантов основан на анализе полиморфизма длин рестрикционных фрагментов ДНК (фрагментов, получаемых путем рассечения молекулы). Сокращенно его называют ПДРФ анализ (используют для исследования жидкой крови). Второй вариант – полиморфизм длины амплифицированных фрагментов ДНК или полимеразная цепная реакция. Третий вариант – анализ полиморфизма очередности нуклеотидов исследуемой ДНК. Из всех этих технологий в судебно-медицинской экспертизе вещественных доказательств биологической природы чаще всего используется метод ПЦР, то есть метод полимеразной цепной реакции. Метод основан на том, что перед исследованием ГВ-участков имеющиеся фрагменты ДНК многократно копируются, тем самым наращивается, до необходимого, объем материала, подлежащего исследованию. Этот метод получил название – метод амплификации или реакции цепной полимеризации, он используется для определения отцовства, материнства и родственных связей, для идентификации неизвестных биологических объектов, предоставленных эксперту судебными органами в качестве вещественных доказательств и для идентификации личностей предполагаемого преступника или жертвы при расследовании соответствующих уголовных дел. Метод ПЦР используется в современных лабораториях для изучения ДНК вирусов и других возбудителей инфек-

ционных болезней, таких как туберкулез, атипичная пневмония и других опасных инфекций. Продвижение методов генной идентификации в области международной практики расследования преступлений и розыска преступников осуществляется Интерполом путем обеспечения доступа к базам данных ДНК государств-членов Интерпола через глобальную полицейскую коммуникационную систему. База данных ДНК Интерпола была создана в 2002 году. А на конец 2006 года эта база содержала информацию о более чем 65000 данных о ДНК из 42 государств [3].

Существует специальное консультативное подразделение Интерпола по использованию генной идентификации, эксперты которой анализируют состояние дел в области генной идентификации, разрабатывают соответствующие рекомендации и оказывают помощь в развитии судебно-генетических лабораторий. Именно благодаря генетическим исследованиям подтверждаются неизвестные нам исторические факты, связанные с жизнью и родословной отдельных личностей. Как, например, то что третий президент США Томас Двефферсон, имевший связь со своей рабыней-квартеронкой Салли Хеммингс, которая за время проживания с ним родила восьмерых внебрачных светлокожих детей, является отцом по крайней мере одного из них, так как это подтвердил недавно проведенный генетический анализ [5]. Становится очевидным, что внедрение метода генотипоскопии в практику правоохранительной деятельности дает возможность не только использовать его в решении многообразных задач идентификации личности человека и животных по следам и объектам биологического происхождения и стать на пути преступности, но и одновременно не позволяет обвинить ложно указанного подозреваемого [3].

С помощью этого метода практически решаются правоохранительные задачи, которые ранее были неразрешимыми, а также подтверждаются важнейшие факты истории человечества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория и практика судебной экспертизы, № 4, 2009.

2. Исследования ученых в области генетики /Интернет источник/.

3. *Кривда Г.Ф., Котельникова В.А.* Генетические экспертизы на службе правоохранительных органов (материалы взяты с сайта ООБСМЭ, 1999).

4. DNA, Next Generation Technology is Here. Miami. Dade Police Department Crime Scene Investigations, 2011.

5. “Father figures” comment bio-med central Investigative Genetics Jobbing Investigative Genetics, 2011.

USING MODERN GENETIC TECHNIQUES IN MEDICINE, FORENSIC PRACTICE AND IN THE OTHER AREAS OF HUMAN ACTIVITY

N.K.Khachatryan

SUMMARY

It becomes obvious that the investment of genetic method in the practice of law enforcement bodies gives an opportunity not only use it and resolve a lot of problems connected with the identification of persons and biological traces of animals and stand in the way of crime, but at the same doesn't allow to accuse innocents falsely. Through this method are clarified the issues faced the law enforcement bodies that seemed to be insoluble before as well as are confirmed important facts of human history.

ԺԱՄԱՆԱԿԱԿԻՑ ԳԵՆԵՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄԸ ԲԺՇԿԱԿԱՆ, ՔՐԵԱԴԱՏԱՎԱՐԱԿԱՆ ՊՐԱԿՏԻԿԱՅՈՒՄ ԵՎ ՄԱՐԴՈՒ ԿԵՆՍԱԳՈՐԾՈՒՆԵՈՒԹՅԱՆ ԱՅԼ ԲՆԱԳԱՎԱՌՆԵՐՈՒՄ

Ն.Կ.Խաչատրյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ակնհայտ է դառնում, որ գենոտիպասկոպիայի մեթոդի ներդրումը իրավապահ մարմինների գործունեության պրակտիկայում հնարավորություն է ընձեռնում ոչ միայն օգտագործել այն և լուծել բազմաթիվ խնդիրներ անձի նույնականացման և կենդանիների կենսաբանական հետքերի նույնականացման առումով և կանգնել հանցագործության ճանապարհին, այլ նաև միևնույն ժամանակ թույլ չի տալիս կեղծ մեղադրել անմեղ կասկածյալին: Այս մեթոդի օգնությամբ պարզաբանվում են իրավապահ մարմինների առջև դրված այն խնդիրներն, որոնք նախկինում գրեթե անլուծելի էին, և հաստատվում են մարդկության պատմության կարևորագույն փաստեր:

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Акопян Ю.Р. –	д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой численного анализа и математического моделирования ЕГУ
Берберян С.Л. –	д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математики и математического моделирования РАУ
Броян М.Ф. –	к.ф.-м.н., ассистент кафедры высшей математики и теоретической механики Армянского национального аграрного университета
Манукян М. –	к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры системного программирования РАУ
Мартиросян А.С. –	аспирант кафедры системного программирования РАУ
Мовсисян Г.Л. –	к.ф.-м.н., (BIT Group, Москва)
Оганесян Д.Г. –	аспирант кафедры молекулярно-клеточной биологии и медицинской биохимии РАУ
Оганесян Р.З. –	аспирантка кафедры численного анализа и математического моделирования ЕГУ
Хачатрян Н.К. –	начальник отдела медико-биологических экспертиз Национального бюро экспертиз НАН РА
Хачатрян Х.А. –	д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института математики НАН РА

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила для авторов журнала «Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки».

Журнал печатает оригинальные статьи по различным направлениям физико-математических и естественных наук.

- К рассмотрению принимаются статьи на русском, армянском или английском языках.
- Статьи должны быть представлены в распечатанном виде и электронной форме.
- К материалам статьи прилагается Договор с издательством РАУ, подписанный одним (ответственным) автором (оформляется в одном экземпляре).
- Статья должна иметь направление от учреждения, в котором выполнена работа. Рукопись подписывается автором (соавторами) с указанием фамилии, имени, отчества, домашнего адреса, места работы, номеров телефонов и e-mail. Необходимо указать, с кем вести переговоры и переписку. Отклоненные статьи не возвращаются.
- В редакцию направляются два экземпляра статьи, набранные шрифтом 12 пунктов через два интервала на одной стороне листа (приблизительно 30 строк на странице, 60 символов в строке). Рукописные вставки не допускаются. Все страницы должны быть пронумерованы.

Перед текстом статьи указываются:

– название статьи;

– инициалы и фамилии авторов (для иностранных авторов на языке оригинала или на английском языке);

– название учреждения (без сокращений и аббревиатур), которое направляет статью, его адрес (город, страна);

– e-mail авторов.

Далее помещается аннотация на русском и армянском языках объемом не более 0.5 машинописной страницы, которая не должна дублировать вводный или заключительный разделы. Аннотация не должна содержать литературных ссылок и аббревиатур. В конце аннотации указываются ключевые слова (keywords). Требуется также аннотация на английском языке.

- Изложение материала должно быть ясным и кратким, без формул и выкладок промежуточного характера и громоздких математических выражений.
- Рисунки представляются в двух экземплярах. Все надписи на рисунке следует давать на английском языке.
- Формулы следует набирать крупно, свободно и четко.

Нумерация формул должна быть сквозной по всей статье (не по разделам).

– Химические формулы, математические символы, сокращения (в том числе в индексах), единицы измерения набираются прямым шрифтом.

– Жирным шрифтом набираются только векторные величины (стрелка сверху не нужна).

– Греческие, готические и «рукописные» буквы должны легко распознаваться.

– Все остальные символы набираются курсивом.

- Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, включенных в общую нумерацию текста. Обязательно наличие заголовков и единиц измерения величин. Все столбцы таблицы должны быть озаглавлены.
- Список литературы должен быть набран на английском языке и оформлен следующим образом:

– для книг – инициалы и фамилии *всех* авторов, название книги, издательство, место издания, год издания в круглых скобках, том;

– для периодических изданий – инициалы и фамилии всех авторов, название журнала, том, – номера первой и последней страниц статьи, год издания в круглых скобках.

Нумерация ссылок должна соответствовать порядку их упоминания в тексте.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Адрес Редакции научных изданий Российско-Армянского
(Славянского) университета:
0051, г. Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123
тел./факс: (+374 10) 27-70-52, (внутр. 42-02)
e-mail: marvolskraya@gmail.com

Заказ № 1
Подписано к печати 19.01.2014г.
Формат 70х100$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Объем 6.7 усл. п.л. Тираж 100 экз.